

## تعیین نقطه های حدی سازه ها با روش رهایی پویا

حسین استیری<sup>۱\*</sup>، امیر باغبان<sup>۲</sup>

- ۱- استادیار، مهندسی عمران، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد  
۲- استادیار، مهندسی عمران، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد

\*گناباد، صندوق پستی ۹۶۹۱۹۵۷۷۸ | [h.estiri@gonabad.ac.ir](mailto:h.estiri@gonabad.ac.ir)

### چکیده

با افزایش قدرت پردازش رایانه ها، راه کارهای حل عددی و تقریبی سازه ها گسترش یافت. رهایی پویا یکی از این روش ها است. این شیوه، فن صریح حل دستگاه معادله های هم زمان می باشد. در این راه حل، مسئله های سازه ای ایستا را به فضای پویا انتقال می دهد. جرم و میرایی ساختگی را در روش رهایی پویا به سامانه های معادله های سازه ای ایستا می افزایند تا یک دستگاه پویای ساختگی به دست آید. آگاهی از چگونگی رفتار سازه ها، به مسیر ایستایی آنها در فضای نیرو-تفییر مکان وابسته است. این مسیر، نقطه های بحرانی و کمانشی را در سازه های با رفتار ناخطي مشخص می کند. برای برآورد نقاط بحرانی سازه ها با فرایند رهایی پویا، از ضربی بار متغیر بهره جویی می شود. در این مقاله، با کمینه کردن هم زمان کار خارجی و انرژی جنبشی، راه کار نوینی برای یافتن عامل بار پیشنهاد خواهد شد. رابطه نویسنده اگان برای نمو ضربی بار، فقط به عامل های ساختگی فن رهایی پویا وابسته می باشد. برای نشان دادن شایستگی روش جدید، چندین سازه، مانند خرپاها، قاب ها و پوسته ها تحلیل ناخطي هندسی می شوند. پاسخ های عددی، کارایی مناسب راه کار پیشنهادی را برای محاسبه نقاط بحرانی مسیر ایستایی سازه ها نشان می دهد.

### واژگان کلیدی

رهایی پویا، مسیر ایستایی، کار خارجی، انرژی جنبشی، نقطه های حدی

## Finding limit points by dynamic relaxation method

H. Estiri, A. Baghban

### Abstract

The numerical structural analysis schemes are extensively developed by progress of modern computer processing power. One of these approximate approaches is called Dynamic Relaxation (DR) method. This technique explicitly solves the simultaneous system of equations. For analyzing the static structures, the DR strategy transfers the governing equations to the dynamic space. By adding the fictitious damping and mass to the static equilibrium equations, the corresponding artificial dynamic system is achieved. The static equilibrium path is required in order to investigate the structural stability behavior. This path shows the relationship between the loads and the displacements. In this way, the critical points and buckling loads of the nonlinear structures can be obtained. The corresponding load to the first limit point is known as buckling limit load. For estimating the buckling load, the variable load factor is used in the DR process. A new procedure for finding the load factor is presented by minimizing external work and kinetic energy, simultaneously. The proposed formula only requires the fictitious parameters of the DR scheme. To prove the efficiency and robustness of the suggested algorithm, various geometric nonlinear analyses are performed. Several trusses, frames and shells structures with nonlinear geometrically behavior is analyzed. The obtained results demonstrate that the new method can successfully estimate the buckling limit load of structures.

### Keywords

Dynamic relaxation, Equilibrium path, External work, Kinetic energy, Limit points

## ۱- مقدمه

رفتار ناخطي خرپای هرمی منظم نوشتند [۱۲]. Saffari و Mansouri راهکار دو نقطه‌ای را برای حل معادله‌های ناخطي حاکم بر رفتار سازه‌ها پیشنهاد کردند [۱۳]. اين فن که با شيوه نيوتن-رافسون مقاييسه شده است، نمي تواند از نقطه‌های حدی بار گذر کند.

اثرهای علمی چاپ شده نشان می‌دهند که هنوز هم پژوهشگران به روش مناسبی دست نیافتند که بتواند هرگونه خم ایستایی را بپیماید. به سخن دیگر، تواناترین شیوه‌های تحلیل ناخطي سازه‌ها در پارهای از حالت‌ها شکست می‌خورند و دخالت تحلیل‌گر در پیشبرد کار لازم است. یکی از روش‌های تحلیل ناخطي سازه‌ها، رهایی پویا است. این شیوه در دسته‌ی فرآیندهای صریح جای دارد. هدف این مقاله، یافتن رابطه‌ای در شیوه رهایی پویا می‌باشد که توانایی پیمایش مسیر ایستایی و تعیین نقاط بحرانی را دارد. در این مقاله، با کمینه کردن هم‌زمان کار خارجی و انرژی جنبشی، رابطه‌ی نوبنی برای عامل بار پیشنهاد می‌گردد. نخست، پایه‌های روش رهایی پویا و رابطه‌های آن می‌آیند. سپس، به راهکارهای پیشینیان برای پیمایش مسیر ایستایی پرداخته می‌شود. در ادامه، شیوه‌ی نوبنی برای به دست آوردن عامل بار رابطه‌سازی می‌گردد. این کار با بهره‌جویی هم‌زمان کار خارجی و انرژی جنبشی انجام می‌پذیرد. برای رسیدن به این هدف، مجموع دو عامل فوق، بر اساس پارامترهای شیوه‌ی رهایی پویا نوشته می‌شود. با کمینه کردن این مجموع، رابطه‌ی جدیدی برای ضربی بار به دست می‌آید. ضربی بار پیشنهادی فقط به عامل‌های ساختگی رابطه‌سازی‌های رهایی پویا وابسته می‌باشد. از این عامل بار برای پیمایش مسیر ایستایی و تعیین نقاط حدی بهره‌جویی می‌شود. سرانجام، با حل نمونه‌های عددی و استفاده از سه گونه معیار، توانایی راه حل پیشنهادی با دیگر شیوه‌های پژوهشگران مقایسه می‌شود.

## ۲- روش رهایی پویا

با بهره‌جویی از تفاوت‌های محدود مرکزی، رابطه‌های پایه‌ای رهایی پویا به دست می‌آیند. برابری‌های زیر آنها را نشان می‌دهند [۱۴].

$$\dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}^n - C_{ii}^n t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} + \\ \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} (p_i^n - f_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, ndof \quad (1)$$

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \delta X_i^n = \\ X_i^n + t^{n+1} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, ndof \quad (2)$$

پایداری یک سازه می‌تواند با برآورد نیروی بحرانی آن تحلیل شود. به طور معمول، برای یافتن بار بحرانی، به حل مسئله‌ی مقدارهای ویژه می‌پردازند [۱]. در این‌گونه تحلیل، نیروها به گونه‌ای به دست می‌آیند که ماتریس سختی سازه ویژه شود. به سخن دیگر، دترمینان آن صفر گردد. خاطر نشان می‌کند، این شیوه برای سازه‌های بزرگ بسیار زمانبر است و مناسب نمی‌باشد [۲]. روش دیگر، بهره‌جویی از مسیر ایستایی سازه‌ها است. در این فن و در بیشتر موردها، بیشینه نیرو پیش از نخستین نقطه‌های حدی بار و تغییرمکان، نیروی کمانشی شناخته می‌شود [۳-۶]. سه گونه منحنی نیرو- جابه‌جایی برای پاسخ سازه‌ها وجود دارد. در یکی از آن‌ها هیچ کمانشی روی نمی‌دهد. در گونه‌ی دیگری از آن‌ها، نقطه‌ی کمانش حدی قرار دارد. با وجود این، نقطه‌ی چند شاخگی در آن نیست. در گونه‌ی آخر، کمانش نقطه‌ی حدی و کمانش چند شاخگی وجود دارند. در این حالت، کمانش نقطه‌ی حدی می‌تواند پیش یا پس از کمانش چند شاخگی باشد [۴]. نقطه‌های چند شاخگی بیشتر در سازه‌های با نقص اولیه روی می‌دهند [۶].

روش‌های تکراری به دو دسته‌ی صریح و ضمنی تقسیم می‌شوند. اگر از نیروی داخلی برای رسیدن به پاسخ استفاده کنند، راهکار صریح است. بنابراین، همه‌ی کارهای ریاضی این فن برداری هستند. سادگی و کارایی زیاد، مهم‌ترین ویژگی‌های این راه حل‌ها می‌باشند. از سوی دیگر، شیوه‌های ضمنی، بر پایه‌ی ماتریس سختی رابطه سازی می‌گردد. به دلیل بهره جستن از عملگرهای ماتریسی، محاسبه‌های راهکارهای ضمنی پیچیده و زمان‌بر هستند. برای نمونه، نقطه‌های حدی بار و تغییرمکان، که در آن‌ها ماتریس سختی صفر یا تعریف نشده‌اند، سبب بروز مشکل در این فرآیندها می‌گردد. باید دانست، نرخ همگرایی شیوه‌های ضمنی بیشتر از روش‌های صریح است [۵].

پژوهشگران، فن‌های گوناگونی برای تحلیل ناخطي و پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها پیشنهاد کرده‌اند. کرنک و هدال برای تحلیل ناخطي سازه‌ها، روش‌های تعاملی را با راه حل‌های شبیه نیوتونی به کار برند [۸]. Boroshaki و Rezaiee-Pajand از راهکار طول قوس متغیر برای حل ناخطي رفتار سازه‌ها بهره جسته‌اند [۹]. Kim و Toklu با شبکه‌های عصبی و فن نیوتون-رافسون به تحلیل ناخطي سازه‌ها پرداختند [۱۰]. برپایه‌ی Toklu، فرآیند بهینه‌سازی و بهره‌جویی از کمینه ساختن انرژی پتانسیل کل سازه، تحلیل ناخطي خرپاها را انجام داد [۱۱]. Ligard و Valvo با کمینه کردن انرژی پتانسیل کل، رابطه‌ی تحلیلی برای



این‌ها، روش نوینی برای حساب کردن میرایی ساختگی را رضایی پژند و همکاران به چاپ رسانیدند [۲۲]. برای رسیدن به این هدف، می‌توان از کمینه نمودن خطا بین دو گام پیاپی و استفاده از فرآیند تکراری بهره جست. با وارد کردن مقدار صفر برای میرایی و یافتن نسبت گام زمانی آن، **Rezaiee-Pajand** و **Sarafrazi** روش دیگری را رابطه سازی کردند [۲۳]. آن‌ها به تحلیل دینامیکی ناخطي سازه‌ها نیز پرداخته‌اند. افزون بر این‌ها، بر پایه‌ی انرژی نامیزان، روش جدیدی به دست آمد [۲۴]. **Rezaiee-Pajand** و همکارانش، کارایی دوازده روش رهایی پویا را برای تحلیل اجزای محدودی سازه‌های قابی و خرپایی بررسی کردند [۲۵]. **Rezaee** و **Rezaiee-Pajand** گام زمانی **Alamatian** نوینی برای رهایی پویای جنبشی برای نهادند [۲۶]. رابطه‌ی جدیدی برای برآورد جرم ساختگی در رهایی پویای **Alamatian** رهایی جنبشی پیشنهاد کرد [۲۷]. **Jung** و **Hemkaransh** پویا را برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها به کار گرفتند [۲۸]. **Rezaiee-Pajand** و همکارانش، در یک مقاله‌ی مروری، رابطه‌سازی‌های گوناگون شیوه‌ی رهایی پویا را بررسی کردند [۲۹]. ایشان، در مقاله‌ی مروری دیگری، کاربردهای این راه حل را در تحلیل سازه‌هایی مانند صفحه‌های خمشی، کابل‌ها، ساختارهای پارچه‌ای و غیره نوشتند [۳۰]. در ادامه، رهایی پویایی میرایی جنبشی پیوسته، گام زمانی دیگری برآورد نمودند [۳۱]. **Labafi** و **Sarafrazi**، میرایی متمرکز را در روش رهایی پویای جنبشی به کار بردند [۳۲]. **Zardi** و **Alamatian**، براساس نگرهی گرشکورین انتقال یافته، رابطه‌ای برای جرم پیشنهاد کردند [۳۳]. **Abbasi** و همکارانش، برپایه‌ی درونیابی لاگرانژی، روش رهایی پویا را بهبود دادند [۳۴]. در ادامه، رابطه‌های یافتن عامل‌های ناشناخته‌ی جرم و میرایی می‌آید.

یکی از رابطه‌های پرکاربرد در یافتن ماتریس جرم، شیوه‌ی **Underwood** می‌باشد [۱۴]. وی برابری (۳) را پیشنهاد کرد.

ایشان مقدار گام زمانی را برابر با  $1/1$  پنداشت.

$$m_{ii} = \frac{(t^n)^2}{4} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \quad (3)$$

این رابطه آشکار می‌کند که مقدار جرم ساختگی هر گره در هر تکرار، با استفاده از حاصل جمع ردیفی قدر مطلق درایه‌های ماتریس سختی به دست می‌آید. با کمینه کردن خطای تغییر مکان در دو تکرار پیاپی و استفاده از نگرهی گرشکورین، درایه‌های جرم ساختگی به صورت رابطه‌ی (۴) به دست می‌آیند [۲۱]:

$$m_{ii} = \max \left[ \frac{(t^n)^2}{2} S_{ii}, \frac{(t^n)^2}{4} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \right] \quad (4)$$

## نشانی علمی و پژوهشی سازه و فولاد / ۳۴

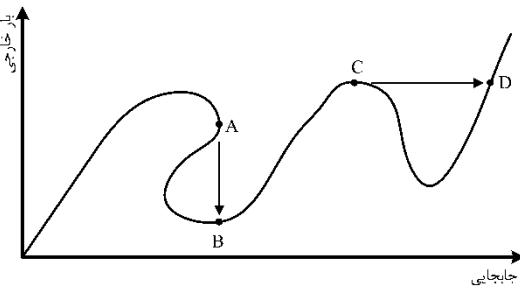
نمادهای  $C_{ii}^n$ ,  $m_{ii}^n$ ,  $t^n$ ,  $f_i^n$ , به ترتیب، درایه‌ی قطری ۱ام از ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی، گام زمانی مجازی و درایه ۱ام از بردار نیروی داخلی در تکرار ۱ام رهایی پویا می‌باشند. بارخارجی دستگاه ایستا و شمار درجه‌های آزادی سامانه، به ترتیب، با  $p_i^n$  و  $ndof$  نمایش داده شده‌اند. افزون بر این، بردارهای  $\delta X$  و  $\dot{X}$ ، به ترتیب، نمو تغییر مکان، جابه‌جایی و سرعت هستند. یکی از ویژگی‌های رهایی پویا، صریح بودن آن است. به سخن دیگر، فرایند حل تنها با کارگرهای برداری انجام می‌شود. این رفتار به سبب قطری پنداشتن ماتریس‌های جرم و میرایی می‌باشد. خاطر نشان می‌کند، رابطه‌های (۱) و (۲) تا رسیدن به خطای پذیرفتی تکرار می‌گردند. ماتریس‌های جرم و میرایی در پایداری فرایند رهایی پویا نقش اساسی دارند. افزون بر این، گام زمانی نیز در افزایش نرخ همگرایی اثر دارد. در ادامه، به چکیده‌ای از کارهای پژوهش گران در برآورد عامل‌های ساختگی رهایی پویا پرداخته می‌شود.

**Munjiza** و همکارانش، میرایی را مناسب با توانی از ماتریس‌های جرم و سختی به کار گرفتند. آن‌ها نشان دادند که هرگاه ماتریس میرایی به شکل  $2M^{-1}S(M^{-0.5})$  باشد، تمامی حالت‌ها به صورت بحرانی میرا می‌شوند [۱۵] و [۱۶]. در این‌جا، عامل‌های  $S$  و  $M$ ، به ترتیب، ماتریس‌های سختی و جرم هستند. برای کاهش تکرارها و با هدف افزایش مرتبه‌ی خطا و به دنبال آن، بهبود نرخ همگرایی رهایی پویا، **Rezaiee-Pajand** و **Taghavian Hakkak** از گسترش دنباله‌ی تیلور بهره جستند. آن‌ها از سه جمله‌ی نخست دنباله‌ی تیلور، جابه‌جایی را به دست آورند [۱۷]. این پژوهش گران، مقدار گام زمانی در تکرارهای رهایی پویا را ثابت پنداشتند. بهبود گام زمانی ساختگی، بر پایه‌ی کمینه سازی نیروهای نامیزان در تکرارهای رهایی پویا، به وسیله‌ی **Kadkhodayan** و همکارانش رابطه سازی شد [۱۸]. روش رهایی پویا برای تحلیل دینامیکی ناخطي را **Rezaiee-Pajand** و **Alamatian** به کار بردند [۱۹]. آن‌ها، این راه حل را با گام زمانی بهبود یافته به کار بردند. شیوه‌ی آن‌ها خطاهای تابع اولیه گیری را کاهش می‌دهد.

پیوند نسبت گام زمانی بهینه و میرایی بحرانی در تحلیل‌های ناخطي با فن رهایی پویا، توسط **Sarafrazi** و **Rezaiee-Pajand** به دست آمد [۲۰]. این پژوهش آشکار کرد که مقدار گام زمانی ثابت اثربخش بر نرخ همگرایی ندارد. **Rezaiee-Pajand** و **Alamatian** رابطه‌های جدیدی برای میرایی و جرم ساختگی برقرار نمودند [۲۱]. راه کار آن‌ها نشان داد که می‌توان بدون انجام کارهای عددی بیشتر نرخ همگرایی را بالا برد. افزون بر



ناحیه‌های بازگشتی، باید بار خارجی متغیر در روش رهایی پویا وارد گردد.



شکل ۱- روش رهایی پویای متداول در ناحیه‌های بازگشتی

با بهره‌جویی از معیارهای پایداری و روش رهایی پویا، Kadkhodayan و همکارانش به تحلیل کمانشی و پس کمانشی صفحه‌ها پرداختند [۳۶]. از سوی دیگر، Ramesh و Krishnamoorthy با بهره‌جویی از نمو جایه‌جایی در تکرارهای رهایی پویا، ناحیه‌های بازگشتی بار را پیمودند [۳۷]. این فرآیند در هنگام بازگشت تغییرمکان کارایی ندارد. این پژوهش‌گران برای برطرف کردن این کاستی، راهکار طول قوس متغیر را با شیوه‌ی رهایی پویا ترکیب کردند [۳۸]. اشاره می‌شود که روش طول قوس نیز خودکار نیست. افون بر این، کارایی راه حل طول قوس وابستگی شدیدی به درجه‌ی آزادی گزینشی و اندازه طول قوس دارد. Lee و همکارانش، فن طول قوس را با روش رهایی پویای جنبشی ترکیب کردند [۳۹ و ۴۰]. تحلیل غیرخطی ترموماستیک صفحات گرد ساندویچی، براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیرخطی کرنش ونکارمن و در نظر گرفتن خواص مواد در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما، توسط Yoosefian و Golkhani Saghi بررسی شد [۴۱]. در پیمایش مسیرهای ایستایی، نیروی نامیزان  $R$  از برابری (۵) حساب می‌گردد. نماد  $\lambda$  ضریب بار است. این عامل سبب می‌شود تا تراز بار ثابت نباشد.

$$R = \lambda P - F \quad (۵)$$

در پیمایش ناحیه‌های بازگشتی Rezaiee-Pajand و Alamatiان، برای یافتن ضریب بار در هر تکرار رهایی پویا، از دو فرآیند کمینه کردن نیروی نامیزان و تغییرمکان نامیزان استفاده نمودند [۴۲]؛ باید آگاه بود، با بهره‌جویی از این راهکارها، تحلیل به جای همگرایی به نقطه‌های ایستایی دور، به نقطه‌های ایستایی نزدیک همگرا خواهد شد. در روش کمینه‌ی نیروی

در بیشتر اثراها، کوچکترین فرکانس سامانه‌ی دینامیکی ساختگی با بهره‌جویی از اصل ریلی برآورد می‌شود. برابری (۵)، آن را نشان می‌دهد.

$$\omega_{min} = \frac{X^T F}{X^T M X} \quad (۵)$$

در این رابطه،  $\omega_{min}$ ، کمینه‌ی فرکانس است. زانگ عامل میرایی را از  $c = 2\omega_i$  به دست آورد [۳۵]. Rezaiee-Pajand و Alamatiان، با استفاده نگره‌های دینامیکی سازه‌ها، برابری (۶) را برای میرایی هر درجه‌ی آزادی پیشنهاد کردند [۲۱]:

$$C_{ii} = \sqrt{\omega_{min}^2 [4 - (t^n)^2 \omega_{min}^2]} m_{ii} \quad (۶)$$

رفتار ناخطي سازه‌ها ويزگي های گوناگونی دارند. نقطه‌های حدی بار و تغییرمکان در مسیرهای پایدار و ناپایدار، نقطه‌های کمانشی و در پی آن رفتار پس‌کمانشی سازه بسیار مهم هستند. مسیر پایدار سازه ممکن است به گونه‌ای رخ دهد که افزایش نیرو و افزایش جایه‌جایی، همزمان روی دهنده باشد. وجود نقطه‌های حدی در مسیر رفتار سازه‌ها، به طور معمول تحلیل و پیمایش خم رفتار آن‌ها را دچار مشکل می‌نماید. بر این پایه، انتخاب راهکار تحلیلی مناسب برای پیمایش کامل مسیر، از ارزش فراوانی برخوردار است. باید دانست، پیدایش ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییرمکان در مسیر ایستایی سازه به سبب وجود نقطه‌های حدی بار یا تغییرمکان می‌باشد. می‌توان از فن رهایی پویا برای پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها استفاده نمود. در رابطه‌سازی‌های متداول رهایی پویا، بار خارجی در هر نمو بارگذاری ثابت است. به همین دلیل، روش‌های معمول رهایی پویا توانایی پیمایش ناحیه‌های مزبور را ندارند. از این رو، با رسیدن به نقطه‌های حدی در مسیر ایستایی پرش‌هایی ایجاد می‌گردد.

شکل (۱) مسیر ایستایی سازه‌ای با ناحیه‌های بازگشتی نیرو و جایه‌جایی را نشان می‌دهد. نقطه‌های حدی تغییرمکان و بار به ترتیب با  $A$  و  $C$  نمایش داده شده‌اند. در نقطه‌ی حدی  $A$ ، با افزایش اندکی در مقدار جایه‌جایی، نمودار به نقطه‌ی  $B$  منتقل می‌گردد. در مورد نقطه‌ی  $C$  نیز چنین است و با افزایش کم نیرو، نقطه‌ی  $D$  در شاخه‌ی دیگر نمودار به دست می‌آید. به سخن دیگر، شیوه‌ی رهایی پویای معمول فقط شاخه‌های افزایشی مسیر ایستایی را می‌پیماید. با وجود این، شیوه‌ای خودکار را برای برطرف نمودن این کاستی پیشنهاد داده‌اند. برای پیمایش



$$\lambda^n =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \left[ 4t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{4t^n \sum_{i=1}^{ndof} \frac{(p_{i,ref})^2}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n}} \quad (9)$$

افزون بر این، **Alamatian** بر پایه‌ی کمینه کردن تغییر مکان نامیزان (MDI) و انرژی جنبشی (MKE)، به ترتیب، روابط (۱۰) و (۱۱) را به چاپ رسانید [۳].

نامیزان (MRF) عامل بار از رابطه‌ی (۸) حساب می‌شود.

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} p_{i,ref} f_i^n}{\sum_{i=1}^{ndof} (p_{i,ref})^2} \quad (8)$$

در اینجا،  $p_{i,ref}$  بردار بار خارجی پایه می‌باشد. این پژوهش‌گران برای گذر خودکار از نقطه‌های حدی، با کمینه نمودن انرژی نامیزان (MRF) برابری (۴) برای یافتن عامل بار پیشنهاد دادند [۴۲]:

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_{i,ref}}{(2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n)^2} \left[ 2t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{2t^n \sum_{i=1}^{ndof} \left( \frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2} \quad (10)$$

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} p_{i,ref} \left( \frac{m_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2 \left[ 2t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{2t^n \sum_{i=1}^{ndof} \left( \frac{m_{ii}^n p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right)^2} \quad (11)$$

افزوده می‌شود تا عامل بار در گام نو حساب شود [۴۴]. برابری (۱۲)، نمو ضریب بار را در روش این پژوهش‌گران نشان می‌دهد.

هم‌چنین، **Estiri** و **Rezaiee-Pajand** با کمینه‌سازی نمو کار نیروهای خارجی نسبت به ضریب بار (MEW)، رابطه‌ای برای نمو عامل بار پیشنهاد کردند. این نمو، به ضریب بار گام پیشین

$$\delta \lambda^n = \frac{-\sum_{i=1}^{ndof} \left( \frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right) \cdot \left( (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + 2t^n r_i^{n-1} \right)}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{4t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (p_{i,ref})^2} \quad (12)$$

کردند. با این کار، رابطه‌ی دیگری برای نمو ضریب بار به دست آمد [۴۵]. رابطه‌ی (۱۳)، عامل پیشنهادی ایشان را نشان می‌دهد.

$$\delta \lambda^n = \frac{-\sum_{i=1}^{ndof} \left( \frac{p_{i,ref}}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \right) \cdot \left( (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + 2t^n r_i^{n-1} \right)}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (p_{i,ref})^2} \quad (13)$$

در این پژوهش با کمینه کردن جمع کار خارجی و انرژی پسماند نسبت به عامل بار، رابطه‌ی جدیدی برای این ضریب به دست می‌آید. کار خارجی  $W$  و انرژی جنبشی  $KE$ ، از رابطه‌ی (۱۴) برآورد می‌شوند.

$$W = \lambda P \delta X; \quad KE = R \delta X \quad (14)$$

سپس، مقدار نیروی پسماند از برابری (۵) در رابطه‌های بالا جای‌گیرین می‌شود.

در رابطه‌سازی دیگر، ایشان با صفر کردن نمو کار نیروهای خارجی (ZWI)، راهکار نوینی برای یافتن نمو عامل بار پیشنهاد

بار کمانشی قابها به وسیله‌ی رهایی پویا توسط **Hosseini-Nejad Goshik** و **Alamatian** [۴۶] انجام پذیرفت. **Estiri** و **Rezaiee-Pajand**، بار بحرانی سازه‌های گوناگون را با **Rezaiee-Pajand** و **Mohammadi-Khatami**، تحلیل غیرخطی سازه‌های کابلی را با رهایی پویا انجام دادند [۴۷].

### ۳- روش پیشنهادی

$$W + KE = \sum_{i=1}^{ndof} \lambda^n p_i^n t^n \left( \frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (\lambda^n p_i^n - f_i^n) \right) + \sum_{i=1}^{ndof} \frac{1}{2} m_{ii}^n \left( \frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} (\lambda^n p_i^n - f_i^n) \right)^2 \quad (15)$$

رابطه‌های (۱۶)، برابری (۱۷) به دست می‌آید.

پس از ساده‌سازی و تعریف عامل‌های  $A^n$  و  $B^n$  به مانند

$$A^n = \frac{2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} X_i^{n-\frac{1}{2}}, \quad B^n = \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W + KE &= \sum_{i=1}^{ndof} \{\lambda^n p_i^n t^n [A^n + B^n (\lambda^n p_i^n - f_i^n)] + \frac{1}{2} m_{ii}^n [A^n + B^n (\lambda^n p_i^n - f_i^n)]^2 = \\ &t^n [\lambda^n A^n p_i^n + B^n (\lambda^n p_i^n)^2 - \lambda^n B^n p_i^n f_i^n] + \\ &\frac{m_{ii}^n}{2} [(A^n)^2 + (B^n \lambda^n p_i^n)^2 + (B^n f_i^n)^2 + 2A^n B^n \lambda^n p_i^n - 2A^n B^n f_i^n - 2(B^n)^2 \lambda^n p_i^n f_i^n] \end{aligned} \quad (17)$$

رابطه‌ی (۱۷) نسبت به ضریب بار مشتق گرفته می‌شود. با این کار، برابری (۱۸) به دست می‌آید.

هدف، محاسبه‌ی ضریب بار  $\lambda$  به‌گونه‌ای است که برابری (۱۷) کمینه شود. شرط لازم برای کمینه شدن اینتابع آن است که مشتق یکم نسبت به عامل بار صفر شود. به همین سبب، از

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{ndof} \{t^n [A^n p_i^n + 2\lambda^n B^n (p_i^n)^2 - B^n p_i^n f_i^n] + m_{ii}^n [\lambda^n (B^n p_i^n)^2 + A^n B^n p_i^n - (B^n)^2 p_i^n f_i^n]\} = 0 \Rightarrow \\ \lambda^n = \sum_{i=1}^{ndof} \frac{m_{ii}^n B^n p_i^n (B^n f_i^n - A^n) + p_i^n t^n (B^n f_i^n - A^n)}{B^n (p_i^n)^2 (B^n m_{ii}^n + 2t^n)} \end{aligned} \quad (18)$$

رابطه‌های متداول نیاز به تعیین علامت است. این کاستی‌ها در شیوه‌ی پیشنهادی برطرف شده است. در ادامه، ویژگی‌های رابطه‌سازی نوین می‌آید. شیوه‌ی جدید به دست آمده برای ضریب بار فقط به عامل‌های رهایی پویا وابسته می‌باشد. از این رو، همه‌ی محاسبه‌ها به صورت برداری انجام می‌پذیرد. افزون بر این، فقط یک رابطه برای عامل بار به دست آمد. بنابراین، این ضریب در سراسر فرآیند حل دارای رابطه‌ی یکسانی خواهد بود. نیاز نداشتن به تعیین علامت که در روش‌های طول قوسی وجود دارد، یکی دیگر از بتری‌های رابطه‌سازی پیشنهادی است. گام‌های روش رهایی پویا در پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها به‌گونه‌ی زیر است:

گام ۱- مقدارهای نخستین سرعت و تغییرمکان را صفر پنداشید.

گام ۲- بردار نیروی داخلی و ماتریس سختی مماسی سازه بر پا شود. این ماتریس، فقط برای برآورد جرم ساختگی است و نیازی به محاسبه‌های ماتریسی در فرایند حل نیست.

گام ۳- ماتریس جرم و میرایی ساختگی را تشکیل دهید.

گام ۴- عامل بار را از رابطه‌های (۱۸) تا (۲۰) یا (۲۱) براساس فن خواستنی به دست آورید.

گام ۵- بردار نیروی نامیزان، از برابری (۱۷) برآورد شود.

گام ۶- اگر  $e_R = 10^{-4} \left\| \frac{R^T R}{P^T P} \right\|$  بود، به گام بروید؛ و گرنه، سرعت‌ها را از رابطه‌ی (۱) به روز کنید. مقدار  $e_R$  خطای پذیرفتی است.

گام ۷- جابه‌جایی‌های گرهی از برابری (۲) به روز گردد و

افزون بر این، شرط کافی برای کمینه شدن برابری (۱۷) این است که مشتق دوم آن نسبت به عامل بار مثبت باشد. رابطه‌ی (۱۹) نشان می‌دهد که مشتق دوم همواره بزرگ‌تر از صفر است. از این رو، ضریب بار (۱۸)، تابع (۱۷) را کمینه می‌کند.

$$\begin{aligned} \frac{d^2(W + RE)}{d(\lambda^n)^2} &= \\ \sum_{i=1}^{ndof} [2B^n (p_i^n)^2 t^n + m_{ii}^n (B^n p_i^n)^2] &> 0 \end{aligned} \quad (19)$$

سرانجام، با جای‌گذاری عامل‌های  $A^n$  و  $B^n$  در رابطه‌ی (۱۸)، می‌توان ضریب بار از برابری (۲۰) حساب کرد.

$$\lambda^n = \frac{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{p_i}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n} \left[ 3t^n f_i^n - (2m_{ii}^n - t^n C_{ii}^n) X_i^{n-\frac{1}{2}} \right]}{\sum_{i=1}^{ndof} \frac{4t^n (p_i)^2}{2m_{ii}^n + t^n C_{ii}^n}} \quad (20)$$

ضریب بار به دست آمده در مقدار بار پایه ضرب می‌شود و بار وارد به سازه به دست می‌آید. سازه با این نیرو، تحلیل ناخطي می‌شود و پاسخ‌ها برای آغاز نمو بعدی به دست می‌آیند. در رابطه‌سازی‌های متداول، گام‌های پیشگویی و درست سازی وجود دارد. به همین سبب، رابطه‌ی نمو بارگذاری در تکرار نخست و نیز تکرارهای تصحیح کننده متفاوت است. در فرآیند روش‌های نموی-تکراری معمول، علامت نمو ضریب بار آن نیز باقی‌ماند. به سخن دیگر، افزایشی یا کاهشی بودن این نمو و تغییر آن اهمیت دارد. آشکار است که علامت نمو ضریب بار در نقطه‌های حدی بار تغییر می‌کند. بنابراین، در



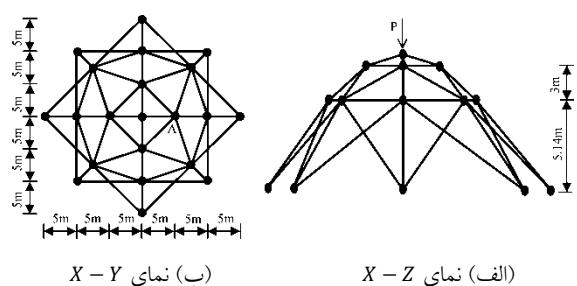
شده است. در ادامه، نماد و چگونگی به دست آوردن آنها می‌آید. برای مقایسه راهکارها، سه معیار به کار رفته است. رابطه‌ی (۲۱) این سه معیار را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} S1 &= \frac{\text{Total Iterations}}{\text{Number of Converged Points}}; \\ S2 &= \frac{\text{Total Iterations}}{\text{Time Iteration}}; \\ S3 &= \frac{\text{Time Iterations}}{\text{Number of Converged Points}} \end{aligned} \quad (21)$$

مقدار کمتر برای  $S1$  اشکار می‌کند که آن روش، شمار نقطه‌های همگرایی بیشتری را در تکرارهای کمتر به دست می‌آورد. برای معیار  $S3$  نیز چنین است. مقدار کمتر برای آن، نشان از زمان کمتر تحلیل به ازای شمار بیشتر در نقطه‌های همگرایی دارد. از سوی دیگر، عامل  $S2$  شمار تکرار را در یک ثانیه از زمان تحلیل نشان می‌دهد. برخلاف معیار پیشین، مقدار بیشتر  $S2$  نشان از برتری شیوه دارد. کم بودن تعداد نقطه‌های همگرایی سبب کاهش زمان تحلیل می‌شود. از سوی دیگر، برای یافتن مسیر ایستایی دقیق‌تر، به نقطه‌های همگرایی بیشتری نیاز است. به همین سبب، زمان تحلیل افزایش می‌یابد. یادآوری می‌کند، هدف اصلی این پژوهش افزون بر افزایش دقت و کارایی روش راهی پویا، زمان را نیز در بر می‌گیرد. با استفاده از این سه عامل، نرخ همگرایی روش‌ها قابل مقایسه می‌باشند.

#### ۴- خرپای سقفی

نخست، راستی آزمایی برنامه با تحلیل خرپای شکل (۲) انجام می‌پذیرد که پژوهشگران پیشین آن را حل کرده‌اند [۴۹]. ارتفاع سازه  $9/17$  متر است. ضریب کشسانی و سطح مقطع عضوهای سازه، به ترتیب،  $210$  گیگاپاسکال و  $0/01$  مترمربع می‌باشند. گرهای پایین‌ترین تراز خرپا روی تکیه‌گاههای ساده هستند.



شکل ۲- هندسه‌ی خرپای سقفی

در ادامه، این سازه با هفت شیوه‌ی جدول (۱) تحلیل شد. شکل (۳) نمودار بار-خیز را نشان می‌دهد. نخست این‌که،

تحلیل را از گام دنبال کنید.

- گام-۸- تغییر مکان‌ها و عامل بار این نمودار چاپ کنید.
- گام-۹- اگر بار یا تغییر مکان هدف به دست آمد، تحلیل پایان می‌یابد؛ و گرنه،  $1 = \lambda + \lambda$  و از گام ادامه دهد.

#### ۴- نمونه‌های عددی

برنامه‌ی رایانه‌ای روش پیشنهادی با استفاده از زبان برنامه‌نویسی فرترن نوشته شده است. سپس، تحلیل سازه‌های گوناگون شامل خرپاهای سه بعدی، قاب‌های دو و سه بعدی و پوسته‌ها که دارای رفتار ناخطي هندسی می‌باشند، انجام می‌پذیرد. رابطه‌سازی پیشنهادی به گونه‌ی جزء بستگی ندارد. از این روش می‌توان این روش را در هر جزء دیگری نیز به کار برد. به این منظور فقط باید رابطه‌های این گونه جزء‌ها را در برنامه وارد کرد. ماتریس جرم، از فن آندروروود و پنداشتمن گام زمانی برابر یک به دست می‌آید. همچنین، برای برآورده عامل میرایی، شیوه‌ی زانگ به کار می‌رود. برای هر نمونه، مسیر ایستایی می‌آید. در بخش‌های پیشین، رابطه‌سازی‌هایی برای یافتن عامل بار در تکرارهای رهایی پویا آمد. جدول (۱) این فرآیندها و نشانه‌ی به کار رفته برای هر یک را نشان می‌دهد.

جدول ۱- راهکارهای رهایی پویایی به کار رفته و نشانه‌ی آنها

| نوع فن      | نشانه‌ی یافتن عامل بار | رابطه‌ی پیشین |
|-------------|------------------------|---------------|
|             | (۸) MRF                | پیشین         |
|             | (۹) MRE                |               |
|             | (۱۰) MDI               |               |
|             | (۱۱) MKE               |               |
|             | (۱۲) MEW               |               |
|             | (۱۳) ZWI               |               |
| (۲۰) MEWaKE |                        | پیشنهادی      |

در اینجا، تغییر مکان در نمو آغازین صفر پنداشته می‌شود. در نمودهای بعدی نیز از نقطه‌ی ایستایی گام پیشین برای حدس نخستین بهره‌جوبی می‌گردد. خاطرنشان می‌کند، نمودار بار، در شمار نقطه‌های مسیر ایستایی اثر می‌گذارد. به سخن دیگر، با کوچک شدن این نمو، نمودار بار-جایه‌جایی با شمار نقطه‌های بیشتری پیمایش می‌شود. این ویژگی سبب شناخت هر چه بهتر رفتار سازه می‌گردد. در این پژوهش، نمودار بار پس از رسیدن به همگرایی و برای شروع گام بعدی، یک در نظر گرفته می‌شود. برای شناخت بهتر روش‌ها، از سه گونه معیار استفاده



شمار تکرارها، زمان تحلیل و امتیاز شیوه‌های مورد بررسی در جدول (۲) درج شده است. عددهای درون پرانتز مرتبه‌ی هر فن را بر پایه‌ی آن معیار نشان می‌دهد. جدول (۲) نشان می‌دهد بر پایه‌ی سنجش‌های S1 و S2 راهکار کمینه‌ی نیروی نامیزان (MRF) دارای بیشترین دقت است. فرآیند پیشنهادی MEWaKE در جایگاه دوم می‌باشد. به سخن دیگر، شیوه‌ی نویسندهای، نقاط همگرا شده‌ی بیشتری را در شمار تکرار کمتری به دست می‌آورد. در سنجش S2 راهکار جدید MEWaKE در رتبه آخر قرار دارد.

جدول ۲- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای خرپای سقفی

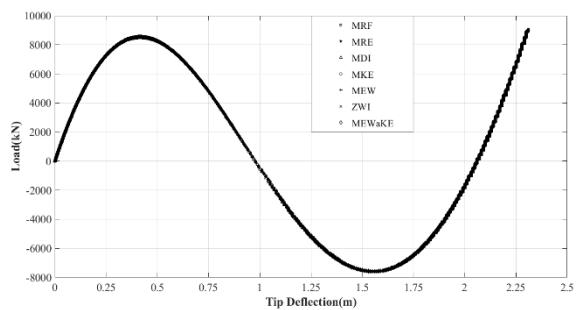
| معیار S3 | معیار S2 | معیار S1 | زمان (ثانیه) | نقاط همگرا | تکرار  | روش    |
|----------|----------|----------|--------------|------------|--------|--------|
| (۱)      | (۴)      | (۱)      | ۷۵/۲۷        | ۶۹۵        | ۵۳۵۸۴  | MRF    |
| (۳)      | (۱)      | (۳)      | ۱۴۸/۱۵۴      | ۱۱۳۹       | ۱۰۷۷۳۲ | MRE    |
| (۴)      | (۲)      | (۴)      | ۲۲۶/۱۰۷      | ۱۵۸۴       | ۱۶۱۴۶۴ | MDI    |
| (۵)      | (۳)      | (۴)      | ۲۲۶/۵۷۵      | ۱۵۸۴       | ۱۶۱۴۶۴ | MKE    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | MEW    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | ZWI    |
| (۲)      | (۵)      | (۲)      | ۱۵۵/۵۸۳      | ۱۲۶۹       | ۱۰۹۴۲۲ | MEWaKE |

#### ۲-۴- خرپای ستاره‌ای

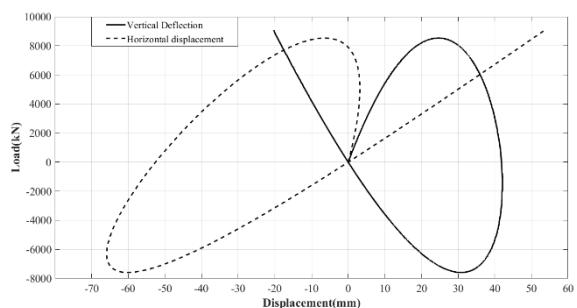
شکل (۴) خرپای ستاره‌ای را نشان می‌دهد که پاسخ آن با بارگذاری متقارن در دست است [۴۳]. این خرپای فضایی ۱۳ گره و ۲۱ درجه‌ی آزادی دارد. گره‌های ۸ تا ۱۲ دارای تکیه‌گاه ساده هستند. برای تحلیل، هر عضو با یک جزء مدل‌سازی می‌شود. ضریب کشسانی و سطح مقطع عضوها به ترتیب، ۳۰۳۰۰ نیوتون بر میلی‌مترمربع و ۳/۱۷ میلی‌مترمربع می‌باشند. مقدار بار پایه برای گرهی ۱ برابر ۵۰ نیوتون و برای گره‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷، ۲۵ نیوتون است.

شکل (۵) مسیر ایستایی خیز نوک خرپا (گرهی ۱) و گرهی ۲ را نشان می‌دهد. محور قائم این نمودارها، مقدار بار وارد بر گرهی نوک را نشان می‌دهد. برای تغییرمکان عمودی گرهی ۱، دو نقطه‌ی حدی نیرو وجود دارد. بارهای ۳۹۸/۳۷۸۵ و ۲۹/۱-۲۲۵/۴۱۸ نیوتون و جابه‌جایی‌های، به ترتیب، ۷/۸۲۱ و ۰/۸۵۲ و ۰/۶۸۹ میلی‌متر به دست آمدند. باید

نتیجه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ای نویسندهای با مرجع [۵۰] یکسان می‌باشد. در فن‌های ZWI و MEW پرش قابل توجه‌ای در مسیر ایستایی مشاهده شد. سایر روش‌ها، نمودار نیرو-جابه‌جایی کم و بیش یکسانی داشتند. با وجود این، شمار تکرارها، شمار نموهای همگرایی و زمان تحلیل آن‌ها تفاوت دارد. همچنین، روش‌های MDI و MKE در شیوه‌های همگرایی یکسانی به دست آورده‌اند. به سخن دیگر، این دو راهکار برای تحلیل این خرپا مانند هم رفتار کرده‌اند. بر پایه‌ی شکل (۳)، سازه پس از بار ۸۵۳۱/۹۶۴ کیلونیوتون وارد بخش پس کمانشی می‌شود. به سخن دیگر، این نیرو نقطه‌ی حدی بار است. جابه‌جایی متناظر این نیرو ۱۶/۸ میلی‌متر به دست آمد. پس از این، سازه ناپایدار می‌باشد. دیگر نقطه‌ی حدی نیرو در بار ۶/۷۵۸۵/۵۰۶ و خیز ۱۵۵۴ میلی‌متر روی داد. شمار نموهای همگرایی میان نقطه‌های MEWaKE و MKE، MRE، MRF، MDI، MRE، MRE و ZWI به ترتیب، ۲۰۹، ۲۹۲، ۳۷۶، ۳۷۶ و ۳۱۸ است. این خرپا دارای دو نقطه‌ی نیروی صفر است. خیز متناظر با این نقطه‌ها برابر با ۰/۹۷۹۲ و ۲۰۶ متر هستند. همچنین، جابه‌جایی افقی گرهی A دارای یک نقطه‌ی حدی تغییرمکان می‌باشد. مقدار نیرو در این نقطه، ۱۵۲۸/۰۹۲ کیلونیوتون به دست آمد.



(الف) خیز گرهی نوک



(ب) نمودار جابه‌جایی گرهی

شکل ۳- مسیر ایستایی خرپای سقفی



نتیجه‌های تحلیل شیوه‌های مورد بررسی در جدول (۲) درج شده است. از نگاه شمار نقطه‌های همگرا شده روی مسیر ایستایی، شمار تکرارها و نیز زمان مورد نیاز برای تحلیل، روش MEWaKE در رتبه‌ی نخست جای دارد. معیارهای S1 تا S3 بر تووانایی راه‌کار نویسنده‌گان دلالت می‌کند. به سخن دیگر، از نگاه زمان تحلیل خرپا، روش MEWaKE از دو راه حل دیگر، تندتر می‌باشد. برایهای جدول (۳)، تحلیل این سازه با فن‌های MRE و MEWaKE به نتیجه‌های بهتری می‌انجامد.

جدول -۳- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای خرپای ستاره‌ای

| معیار S3 | معیار S2 | معیار S1 | زمان (ثانیه) | نقاط همگرا | تکرار  | روش    |
|----------|----------|----------|--------------|------------|--------|--------|
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | MRF    |
| (۲)      | (۲)      | (۲)      | ۲۴۴/۱۵۶      | ۱۰۶۳       | ۱۷۰۱۳۶ | MRE    |
| (۳)      | (۳)      | (۳)      | ۳۷۳/۱۳۷      | ۱۴۹۰       | ۲۴۶۰۵۹ | MDI    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | MKE    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | MEW    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | ZWI    |
| (۱)      | (۱)      | (۱)      | ۲۲۵/۸۷۶      | ۱۱۳۶       | ۱۶۳۰۲۲ | MEWaKE |

#### ۳-۴- قاب توگل

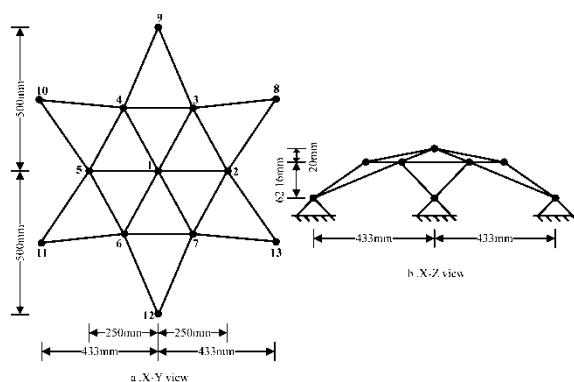
در ادامه، کارایی فن نویسنده‌گان در تحلیل سازه‌های قابی بررسی می‌شود. برای این کار، نخست راستی آزمایی برنامه در تحلیل ناحطی هندسی قاب شکل (۶) انجام می‌پذیرد [۵۱]. هر عضو قاب، با پنج جزء یکسان جایگزین خواهد شد. ضرب کشسانی، سطح مقطع و لنگر لختی عضوها، به ترتیب، ۱۰۰ گیگاپاسکال، ۱۸/۵۵ میلی مترمربع و ۹/۲۷ میلی متر به توان چهار می‌باشد. ویلیام برابری (۲۲) را برای پاسخ تحلیلی رابطه‌ی بار و تغییرمکان پیشنهاد داد [۵۲]. عامل‌های  $F_1$  و  $F_2$ ، به ترتیب، به سختی‌های محوری و خموشی وابسته هستند. افزون بر این، طول نخستین عضوها، زاویه با افق و خیز نوک، به ترتیب، با  $L$ ،  $\beta_0$  و  $D_y$  نشان داده شده‌اند. برای جزئیات بیشتر، مرجع [۵۲] خوانده شود.

$$\lambda P \approx 2(F_1 + F_2 \sin \beta_0) \quad (22)$$

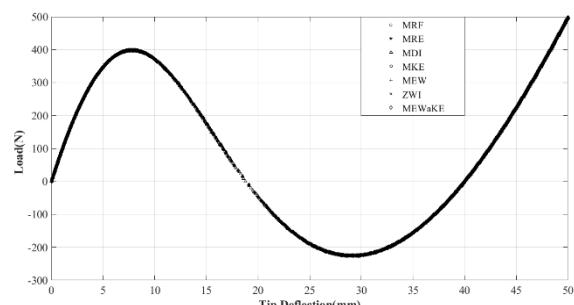
$$F_1 = \frac{EA}{L} \left[ D_y \sin \beta_0 - 0.6 \frac{D_y^2}{L} \right] \quad (23)$$

شکل (۵) مسیر ایستایی خیز گرهی نوک را نمایش می‌دهد. تمامی روش‌ها، به جز فن ZWI، توانسته‌اند مسیر ایستایی سازه را کامل پیمایش کنند. به سخن دیگر، شیوه‌ی ZWI قادر به

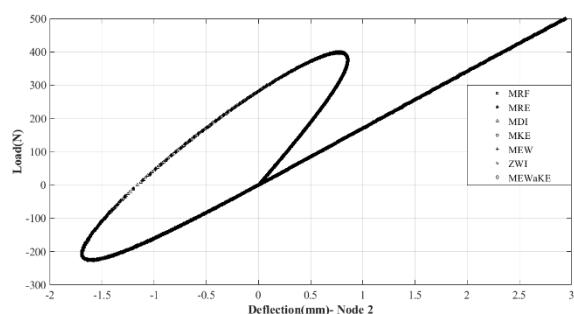
اشارة شود که روش‌های MRF، MKE و ZWI دارای پرش قابل توجه‌ای در مسیر ایستایی این سازه بودند. به همین سبب، این شیوه‌ها توانایی پیمایش این خرپا را نداشتند. سایر فرآیندها مناسب‌ترین عمل‌کرد را دارند و همه‌ی مسیر بازگشت بار و تغییرمکان را پیموده‌اند. با وجود این، شمار نقطه‌های همگرایی در آن‌ها متفاوت است؛ به گونه‌ای که فن‌های MDI و MEWaKE مسیر ایستایی را با تعداد بیشتری نمو پیموده‌اند. برای نمونه، شمار نقطه‌های همگرایی بین نقطه‌های حدی بار در راه‌کارهای MRE، MDI و MEWaKE، به ترتیب، ۱۸۰، ۳۶۳ و ۲۲۷ می‌باشد.



شکل ۴- خرپای ستاره‌ای



(الف) خیز گرهی ۱



(ب) خیز گرهی ۲

شکل ۵- مسیر ایستایی خرپای ستاره‌ای



جدول ۴- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب توگل

| معیار S3 | معیار S2 | معیار S1 | زمان (ثانیه) | نقاط همگرا | تکرار  | روش    |
|----------|----------|----------|--------------|------------|--------|--------|
| (۲)      | (۵)      | (۱)      | ۵۶/۲۵۴       | ۴۷         | ۴۳۵۵۳  | MRF    |
| (۴)      | (۲)      | (۴)      | ۱۳۸/۵۶       | ۹۶         | ۱۰۷۹۷۳ | MRE    |
| (۶)      | (۴)      | (۵)      | ۱۹۶/۴۹۸      | ۱۲۳        | ۱۵۲۸۸۹ | MDI    |
| (۵)      | (۳)      | (۶)      | ۱۹۶/۳۸۹      | ۱۲۳        | ۱۵۲۹۳۹ | MKE    |
| (۳)      | (۶)      | (۳)      | ۱۲۶/۲۳۶      | ۹۵         | ۹۷۶۴۸  | MEW    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -      | ZWI    |
| (۱)      | (۱)      | (۲)      | ۱۳۶/۹۵۳      | ۱۱۶        | ۱۱۶۹۴۴ | MEWaKE |

۳۰۳۰۰ و ۱۰۹۶۰۰ نیوتون بر سانتی‌متر مربع هستند. گرهی ۱ دارای بار  $P$  و نیروهای وارد بر گره‌های ۲، ۳ و ۷ برابر  $0.5P$  است. بارها به سوی پایین (خلاف راستای  $Z$ ) وارد می‌شوند.

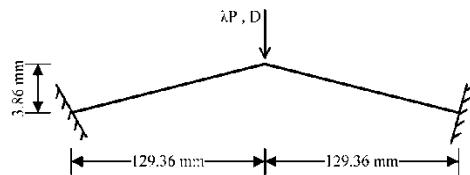
جدول ۵- مشخصات هندسی قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

| $I_{33}$ (cm <sup>4</sup> ) | $I_{22}$ (cm <sup>4</sup> ) | $J$ (cm <sup>4</sup> ) | $A_{v33}$ (cm <sup>2</sup> ) | $A_{v22}$ (cm <sup>2</sup> ) | $A$ (cm <sup>2</sup> ) |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------|
| ۲/۳۷۷                       | ۰/۲۹۵                       | ۰/۹۱۸                  | ۲/۶۴۱۷                       | ۲/۶۴۱۷                       | ۳/۱۷                   |

امتیاز راهکارهای به کار رفته قاب ستاره‌ای در جدول (۶) درج شده‌اند. روش ZWI، توانایی تحلیل این سازه را نداشت. مانند نمونه‌ی پیشین، شیوه‌ی پیشنهادی، رتبه‌ی نخست در حل این قاب دارد. مسیر ایستایی این سازه در شکل (۸) نشان داده شده است. بر این پایه، دو نقطه‌ی بازگشت نیرو و دو نقطه‌ی بازگشت جایه‌جایی در این سازه به وجود آمد. نقطه‌های حدی بار در نیروهای ۵۷۹/۴۰۶۸ و ۳۳۰/۵۱۶۲ نیوتون روی می‌دهند. نقطه‌های حدی تغییرمکان نیز کم و بیش در همین بارها جای دارند. نتیجه‌های به دست آمده با مرجع [۵۳] یکسان می‌باشد. باید دانست، روش MRF دارای پرش در مسیر ایستایی بود. به همین سبب، این راه حل در رتبه‌ی آخر جای دارد.

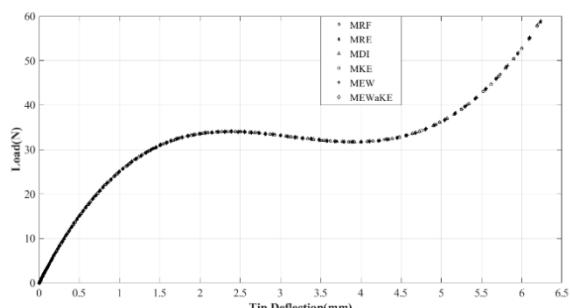
جدول ۶- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب بدون اثر برش

| معیار S3 | معیار S2 | معیار S1 | زمان (ثانیه) | نقاط همگرا | تکرار | روش    |
|----------|----------|----------|--------------|------------|-------|--------|
| (۶)      | (۶)      | (۶)      | ۴۰۵/۶۷۸      | ۷۰         | ۵۰۷۷  | MRF    |
| (۳)      | (۴)      | (۳)      | ۴۶۲/۴۰۰      | ۷۵         | ۵۷۸۹  | MRE    |
| (۴)      | (۵)      | (۴)      | ۵۳۸/۶۳۸      | ۸۶         | ۶۷۴۲  | MDI    |
| (۲)      | (۲)      | (۲)      | ۵۱۵/۱۲۸      | ۹۰         | ۶۴۶۰  | MKE    |
| (۵)      | (۳)      | (۵)      | ۳۸۶/۴۲۸      | ۵۶         | ۴۸۴۳  | MEW    |
| -        | -        | -        | -            | -          | -     | ZWI    |
| (۱)      | (۱)      | (۱)      | ۵۴۸/۶۹۸      | ۱۰۵        | ۶۹۷۹  | MEWaKE |



شکل ۶- قاب ویلیام توگل

تحلیل این قاب نبود. مانند نمونه‌های پیشین، روش‌های MKE و MDI برای تحلیل این خرپا مانند هم رفتار کردند. فرآیندهای MKE و MEWaKE مسیر ایستایی را با تعداد بیشتری نمو همگرا شده می‌پیمایند. نقطه‌ی کمانشی این قاب در نیروی ۳۴/۰۲۲۸۰۲ نیوتون روی می‌دهد. پس از آن، ناحیه‌ی بازگشت بار سازه به آرامی شکل می‌گیرد و قاب وارد بخش پس کمانشی می‌شود. در این ناحیه، با کاهش در نیرو، تغییرمکان افزایش می‌یابد. این روند تا رسیدن بار به ۳۱/۰۷۰۵۸۱۸ نیوتون ادامه دارد. خیز گرهی نوک، به ترتیب، ۲/۳۸ و ۳/۹۲۲۷ میلی‌متر است. شمار نموهای همگرایی میان نقطه‌های حدی بار در شیوه‌های شما MEWaKE و MEW MKE MDI MRE MRF، به ترتیب، ۶، ۱۵، ۱۸، ۲۲، ۲۲ و ۱۵ است.



شکل ۷- مسیر ایستایی گرهی نوک قاب توگل

جدول (۴) نتیجه‌های سنجش‌ها را نشان می‌دهد. بر پایه‌ی این جدول، راهکار پیشنهادی MEWaKE در دو معیار، رتبه‌ی نخست و در معیار S1 رتبه‌ی دوم را دارد. به سخن دیگر، شیوه‌ی نویسنده‌گان از نظر زمان تحلیل در هر نمو یا تکرار، عملکرد مناسب‌تری به دست آورده است.

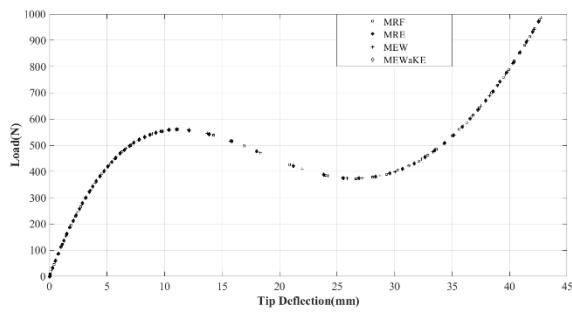
#### ۴- قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

در این بخش، تحلیل قاب ستاره‌ای شکل (۴) انجام می‌پذیرد. پیش از این، میک و تان این سازه را تحلیل کردند [۵۳]. این قاب دارای ۲۴ عضو، ۱۳ گره و ۶۰ درجه‌ی آزادی است. مشخصه‌های هندسی برای این گونه در جدول (۵) درج شده‌اند. افزون بر این، ضریب کشسانی و ضریب برشی، به ترتیب،

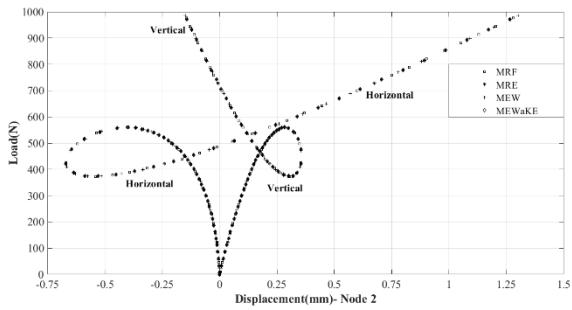


جدول ۷- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای قاب با اثر برش

| معیار<br>S3 | معیار<br>S2 | معیار<br>S1 | زمان<br>(ثانیه) | نقاط<br>همگرا | تکرار | روش    |
|-------------|-------------|-------------|-----------------|---------------|-------|--------|
| (۲)         | (۲)         | (۲)         | ۱۷۶/۴۸۳         | ۵۲            | ۳۲۲۶  | MRF    |
| (۳)         | (۳)         | (۳)         | ۲۱۶/۴۶۶         | ۶۲            | ۳۹۵۶  | MRE    |
| -           | -           | -           | -               | -             | -     | MDI    |
| -           | -           | -           | -               | -             | -     | MKE    |
| (۴)         | (۴)         | (۴)         | ۱۹۹/۰۰۹         | ۵۳            | ۳۶۳۲  | MEW    |
| -           | -           | -           | -               | -             | -     | ZWI    |
| (۱)         | (۱)         | (۱)         | ۲۳۰/۷۳۱         | ۷۱            | ۴۲۳۶  | MEWaKE |



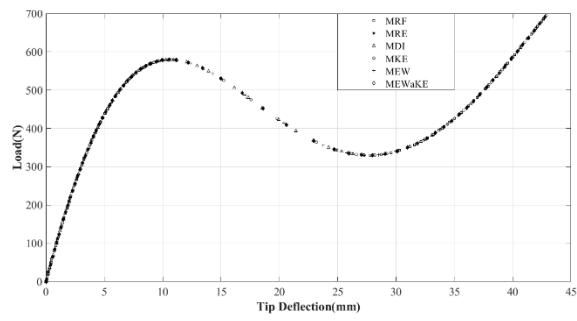
(الف) خیز گرهی ۱



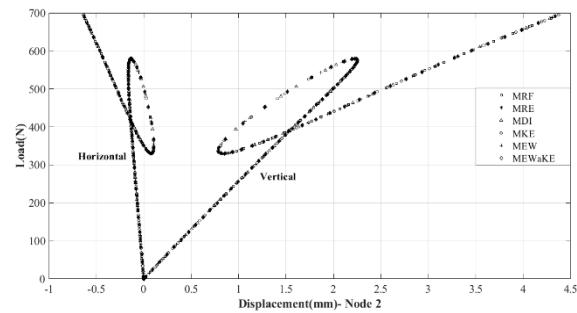
(ب) جایه‌جایی گرهی ۲

شکل ۹- مسیر ایستایی قاب ستاره‌ای با اثر برش

تحلیل پوسته‌ها بررسی می‌شود. برای این کار، سقف استوانه‌ای شکل (۱۰) تحلیل می‌گردد. دو لبه‌ی راستای Y، تکیه‌گاه ساده و دو لبه‌ی دیگر، آزاد هستند. به سبب تقارن، یک چهارم پوسته تحلیل می‌شود. برای این کار، ۱۰۰ جزء به کار می‌رود. ضریب کشسانی  $3/10275$  گیگاپاسکال، نسبت پوآسون  $0.3$  و ضخامت  $12/7$  میلی‌متر می‌باشد [۵۴]. یک بار نقطه‌ای در راستای Z- و در گرهی A وارد می‌شود. شکل (۱۱) نمودار بار-خیز گره‌های A و B را نمایش می‌دهد. این پوسته دارای ۲ نقطه‌ی بازگشت بار می‌باشد. نخستین نقطه‌ی حدی در نیروی  $2/225169$  کیلونیوتون جا دارد. خیز نقطه‌های A و B در این نقطه‌ی حدی، به ترتیب  $4/7326$  و  $10/7823$  میلی‌متر به دست آمدند. پس از



(الف) خیز گرهی نوک



(ب) جایه‌جایی گرهی ۲

شکل ۸- مسیر ایستایی قاب ستاره‌ای بدون اثر برش

#### ۴-۵- قاب ستاره‌ای با اثر برش

اکنون، تحلیل قاب ستاره‌ای پیشین با اثر برش انجام می‌پذیرد. پیش از این، میک و تان این سازه را تحلیل کردند [۵۳]. مشخصه‌های هندسی این قاب‌ها مانند قبل است. افزون بر این، ضریب کشسانی و ضریب برشی، به ترتیب،  $30300$  و  $10960$  نیوتون بر سانتی‌متر مربع هستند. نیروی  $P$  در گرهی نوک وارد می‌شود.

رتبه‌ی فرآیندهای به کار رفته برای تحلیل قاب در جدول (۵) درج شده‌اند. بر این پایه، شیوه‌های MRF، MEWaKE، MRE و MEW رده‌های نخستین تا چهارم را دارند. افزون بر این، راهکارهای MDI، MKE و ZWI توانایی تحلیل این قاب را نداشتند. شکل (۹) نمودارهای بار-جایه‌جایی گره‌های ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که با مرجع [۵۳] هماهنگی دارد. این سازه در نقطه‌ی حدی بار است. خیز نوک در این نیروها، به ترتیب،  $11/032$  و  $26/891$  میلی‌متر بود. افزون بر این‌ها، سازه دارای یک نقطه‌ی حدی تغییرمکان در باری برابر  $448/2955$  نیوتون می‌باشد. هنگامی این بار به دست می‌آید که خیز گرهی ۲ برابر  $0/354$  میلی‌متر باشد.

#### ۴-۶- سقف استوانه‌ای

در بخش دیگری از این پژوهش، توانایی روش نویسنده‌گان در

جدول ۸- امتیاز و رتبه‌ی روش‌ها برای سقف استوانه‌ای

| معیار S3 | معیار S2 | معیار S1 | زمان (ثانیه) | نقاط همگرا | تکرار   | روش    |
|----------|----------|----------|--------------|------------|---------|--------|
| (۵)      | (۴)      | (۳)      | ۵۱۴/۷۲۳      | ۳۷         | ۹۱۵۴۲   | MRF    |
| (۶)      | (۵)      | (۴)      | ۳۱۹۰/۵۳      | ۱۲۳        | ۵۲۱۴۶۲  | MRE    |
| (۷)      | (۶)      | (۵)      | ۴۸۷۷/۴۹      | ۱۷۴        | ۷۷۳۰.۹۰ | MDI    |
| (۸)      | (۷)      | (۶)      | ۴۳۱۱/۶۷      | ۱۷۳        | ۷۷۳۰.۹۰ | MKE    |
| (۹)      | (۸)      | (۷)      | ۲۷۶۷/۱۰      | ۱۲۳        | ۴۷۷۷۶۱  | MEW    |
| (۱۰)     | (۹)      | (۸)      | ۴۲۲۰/۶۹      | ۱۷۴        | ۶۷۵۵۷۴  | ZWI    |
| (۱۱)     | (۱۰)     | (۹)      | ۳۹۵۸/۴۸      | ۱۵۳        | ۶۳۱۵۱۸  | MEWaKE |

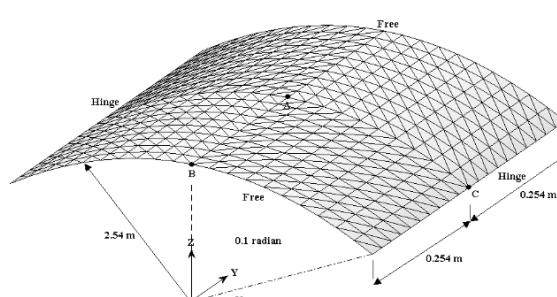
عامل بیان می‌دارد که راهکار  $i$  چند بار رتبه‌ی زرا به دست آورده است. برای نمونه، شیوه‌ی MEWaKE، از نگاه معیار S1، سه بار نخستین فن می‌باشد. بنابراین،  $Q_{i1}$  برای این راه حل برابر سه است. هم‌چنین، فرایند MDI دو بار رتبه‌ی چهارم را بر پایه‌ی معیار S2 دارد. از این‌رو،  $Q_{i4}$  برای این روش برابر دو می‌باشد. شمار سازه‌ای که راهکار  $i$  قادر به تحلیل آن‌ها نبوده است با  $Q_{i0}$  نمایش داده می‌شود. برای نمونه، در پنج مسأله شیوه‌ی ZWI توانایی رسیدن به پاسخ را ندارد. پس،  $Q_{i0}$  برای آن برابر پنج است.

هنگامی که فرایندی توانایی رسیدن به پاسخ را نداشته باشد، در رابطه‌ی (۲۴) وارد نمی‌گردد. همچنین، اگر یک فن در همه‌ی ۶ نمونه‌ی حل شده رتبه‌ی نخست را دارا باشد عدد ۴۲ به دست می‌آید. در نتیجه، امتیاز  $S_{ij}$  برای آن ۱۰۰ خواهد بود. امتیاز و رتبه‌ی پایانی راه حل‌ها در جداول (۹) تا (۱۱) نوشته شده‌اند. بر این پایه، رتبه‌ی بندی روش‌ها در جدول (۱۲) می‌آید. این جدول نشان می‌دهد راهکار نویسنده‌گان، در هر سه معیار رتبه‌ی نخست را دارد. پس از آن، فرآیندهای MRF و MRE، به ترتیب، در جایگاه‌های دوم و سوم جای می‌گیرند. جدول (۱۲) بیان می‌کند که شیوه‌ی ZWI بدترین فن برای پیمایش مسیر ایستایی است.

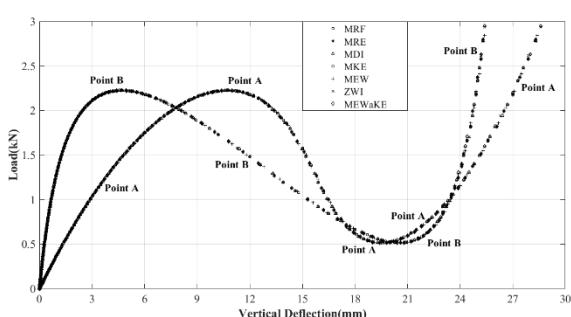
جدول ۹- امتیاز روش‌ها بر پایه‌ی معیاری S1

| S      | $Q_{ij}$ |   |   |   |   |   |   |   | روش    |
|--------|----------|---|---|---|---|---|---|---|--------|
|        | ۷        | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |        |
| ۵۴/۷۶۲ | ۱        | ۱ |   |   |   | ۱ | ۲ | ۱ | MRF    |
| ۶۹/۰۴۸ |          |   | ۲ | ۲ | ۱ |   |   |   | MRE    |
| ۴۵/۲۳۸ |          |   | ۲ | ۲ | ۱ |   |   | ۱ | MDI    |
| ۳۳/۳۲۳ | ۲        |   |   | ۱ |   | ۱ |   | ۲ | MKE    |
| ۴۲/۸۵۷ |          |   | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |   | ۲ | MEW    |
| ۱۶/۶۶۷ |          |   |   |   |   |   | ۱ | ۵ | ZWI    |
| ۹۰/۴۷۶ |          |   |   |   | ۱ | ۲ | ۳ |   | MEWaKE |

این بار، سازه وارد بخش پس کمانشی می‌شود. نقطه‌ی بازگشت نیروی دیگر، در مقدار بار  $0/516456$  کیلونیوتون رخ داد. جایه‌جایی‌های مورد اشاره، به ترتیب،  $20/6084$  و  $19/5754$  میلی‌متر بودند. شمار نموهای همگرایی میان نقطه‌های حدی بار در شیوه‌های MRF، MEW، MKE، MDI، MRE و ZWI، به ترتیب،  $7, 25, 36, 36, 31$  و  $31$  است.



شکل ۱۰- سقف استوانه‌ای



شکل ۱۱- نمودار بار-جایه‌جایی برای سقف استوانه‌ای

جدول (۸) نتیجه‌های تحلیل این سقف را نشان می‌دهد. روش MRF شمار بسیار کمی نقطه‌ی همگرایی به دست آورده است. به سخن دیگر، این شیوه دارای کمترین دقت می‌باشد. با وجود این، همه‌ی مسیر ایستایی را پیمایش کرد. از این‌رو، فرآیند MRF آخرین رتبه را دارد. بر پایه‌ی جدول (۸)، راهکار MEW برترین راه حل برای این سقف استوانه‌ای می‌باشد.

## ۵- رتبه‌بندی روش‌ها

بر پایه‌ی شمار تکرارها، شمار نموهای همگرایی و زمان تحلیل، مرتبه‌ی هر راهکار برآورد شد. برای مقایسه راه حل‌ها، امتیاز هر فرآیند از برابری (۲۴) به دست می‌آید.

$$S_{ij} = 100 \times \sum_{j=1}^7 Q_{ij} \times (8-j)/42 \quad (24)$$

نماد  $Q_{ij}$  رتبه‌های  $j$  روش  $i$  را نشان می‌دهد. به سخن دیگر، این



جدول ۱۰- امتیاز روش‌ها بر پایهٔ معیاری S2

| S      | $Q_{ij}$ |   |   |   |   |   |   |   | روش    |
|--------|----------|---|---|---|---|---|---|---|--------|
|        | ۷        | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |        |
| ۳۸/۰۹۵ | ۱        | ۱ | ۱ | ۱ |   | ۱ |   | ۱ | MRF    |
| ۷۸/۵۷۱ |          |   |   | ۱ | ۲ | ۲ | ۱ |   | MRE    |
| ۴۷/۶۱۹ |          | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |   | ۱ | MDI    |
| ۵۴/۷۶۲ |          |   |   |   | ۲ | ۱ | ۱ | ۲ | MKE    |
| ۴۰/۴۷۶ |          | ۱ |   | ۱ | ۱ | ۱ |   | ۲ | MEW    |
| ۹/۵۲۳۸ |          |   |   | ۱ |   |   |   | ۵ | ZWI    |
| ۸۰/۹۵۲ |          |   | ۲ |   |   |   | ۴ |   | MEWaKE |

جدول ۱۱- امتیاز روش‌ها بر پایهٔ معیاری S3

| S      | $Q_{ij}$ |   |   |   |   |   |   |   | روش    |
|--------|----------|---|---|---|---|---|---|---|--------|
|        | ۷        | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |        |
| ۵۲/۳۸۱ | ۱        | ۱ |   |   |   | ۲ | ۱ | ۱ | MRF    |
| ۶۶/۶۶۷ |          |   | ۱ | ۱ | ۲ | ۱ |   |   | MRE    |
| ۴۰/۴۷۶ |          | ۲ |   | ۲ | ۱ |   |   | ۱ | MDI    |
| ۴۰/۴۷۶ |          |   | ۲ |   | ۱ | ۱ |   | ۲ | MKE    |
| ۴۵/۲۳۸ |          |   | ۱ | ۱ | ۱ |   | ۱ | ۲ | MEW    |
| ۱۴/۲۸۶ |          |   |   |   | ۱ |   |   | ۵ | ZWI    |
| ۹۰/۴۷۶ |          |   |   | ۱ |   | ۱ | ۴ |   | MEWaKE |

جدول ۱۲- رتبه‌بندی روش‌ها برای هر سنجش

| معیار |     |           |     |     |     |        |    | معیار |
|-------|-----|-----------|-----|-----|-----|--------|----|-------|
| ZWI   | MKE | MEW       | MDI | MRF | MRE | MEWaKE | S1 | معیار |
| ZWI   | MRF | MEW       | MDI | MKE | MRE | MEWaKE | S2 |       |
| -     | ZWI | MDI & MKE | MEW | MRF | MRE | MEWaKE | S3 |       |

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رابطه‌سازی نوینی برای پیمایش مسیر ایستایی با روش رهایی پویا پیشنهاد شد. پایه‌ی این کار بر کمینه کردن مجموع نمو کار و انرژی جنبشی در تکرارها استوار است. این فن توانایی پیمایش مسیرهای ایستایی در سازه‌های دارای ناحیه‌های بازگشت بار و تغییر مکان، را دارد. نخست، به شیوه‌ی رهایی پویا و رابطه‌های آن پرداخته شد. سپس، راهکارهایی آمدند که تاکنون برای یافتن عامل بار پژوهشگران داده‌اند. در ادامه، رابطه‌ی پیشنهادی در دسترس قرار گرفت.

یافتن عامل بار در شیوه‌ی پیشنهادی خودکار و بدون شرط می‌باشد و در آن تنها از عامل‌های موجود در تکرارهای رهایی پویا استفاده می‌گردد. توانایی رابطه‌سازی پیشنهادی با تحلیل اجزای محدود چندین سازه شامل خرپاها، قاب‌ها و پورشه‌ها که

دارای رفتار ناخطری هندسی می‌باشند، انجام پذیرفت. کم بودن شمار نموهای همگرایی سبب کاهش زمان تحلیل می‌شود. از سوی دیگر، برای یافتن مسیر ایستایی دقیق‌تر، زمان تحلیل افزایش می‌باید. به همین سبب، معیار زمان نیز باید لحاظ گردد. خاطرنشان می‌کند، هدف اصلی این پژوهش افزون بر داشتن دقت و ندادشتن پرش، زمان مناسب تحلیل روش رهایی پویا می‌باشد. از سه معیار سنجش برای مقایسه‌ی فن‌های پیشینیان و رابطه‌سازی پیشنهادی بهره‌جوبی شد. پاسخ‌های عددی نشان می‌دهند، دقت شیوه‌ی نویندگان برای پیمایش مسیرهای ایستایی در تمام مسئله‌ها بیشتر از دو روش MRF و MRE است. از سوی دیگر، دقت این فرآیند اندکی کمتر از فن‌های MDI و MKE بود. باید دانست، دقت بیشتر این راهکارها سبب افزایش نقطه‌های همگرایی و در نتیجه افزایش زمان تحلیل می‌گردد. با بررسی هم‌زمان شمار نقطه‌های همگرایی، شمار کل تکرارها و زمان کل تحلیل، نشان داده شد که راه حل پیشنهادی نسبت به رابطه‌های پیشینیان توانایی مناسب‌تری دارد.

## ۷- مراجع

- [1] Novoselac, S., Ergić, T. and Balićević, P. (2012), "Linear and nonlinear buckling and post buckling analysis of a bar with the influence of imperfections", Tehnički vjesnik, Vol. 19, pp. 695-701.
- [2] Rezaiee-Pajand, M., Vejdani Noghrejyan, H.R. and Naghavi, A.R. (2013), "Four new methods for finding structural critical points", Mechanics Based Design of Structures and Machines, Vol. 41, pp. 399-420.
- [3] Alamatian, J. (2013), "Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with dynamic relaxation method", Computers & Structures, Vol. 114, pp. 11584-11597.
- [4] Chen, C.N. (1996), "A finite element study on bifurcation and limit point buckling of elastic-plastic arches", Computers & Structures, Vol. 60, pp. 189-196.
- [5] Pi, Y.L. and Bradford, M.A. (2014), "Multiple unstable equilibrium branches and non-linear dynamic buckling of shallow arches", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 60, pp. 33-45.
- [6] Szilard, R. (1985), "Critical load and post-buckling analysis by fem using energy balancing technique", Computers & Structures, Vol. 20, pp. 277-286.
- [7] Rezaee, H. (2012), "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method", Master's Thesis, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.
- [8] Krenk, S. and Hedeland, O. (1995), "A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 123, pp. 95-107.
- [9] Rezaiee-Pajand, M. and Boroshaki, F. (1999), "A variable arc-length method", Asian Journal of Structural Engineering, pp. 321-44.
- [10] Kim, J.H. and Kim, Y.H. (2001), "A predictor-corrector method for structural nonlinear analysis", Computer

- [28] Namadchi, A.H. and Alamatian, J. (2016), "Explicit dynamic analysis using dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, Vol. 175, pp. 91-99.
- [29] Rezaiee-Pajand, M., Alamatian, J. and Rezaee, H. (2017), "The state of the art in Dynamic Relaxation methods for structural mechanics Part 1: Formulations", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 7, pp. 65-86.
- [30] Rezaiee-Pajand, M., Alamatian, J. and Rezaee, H. (2017), "The state of the art in Dynamic Relaxation methods for structural mechanics Part 2: Applications", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 7, pp. 87-114.
- [31] Jung, S., Kim, T.-Y. and Yoo, W.-S. (2018), "Adaptive step-size control for dynamic relaxation using continuous kinetic damping", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [32] سرافرازی، س.د. و لبافی، س.ف. (۱۳۹۶)، "روش رهایی پویا با میرایی متمرکز"، *مهندسی عمران مدرس*، دوره ۱۷، شماره ۳، ص. ۱۴۶-۱۵۶.
- [33] Zardi, I. and Alamatian, J. (2020), "A new formulation for fictitious mass of viscous dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 48, pp. 542-567.
- [34] Abbasi, M., Namadchi, A.H. and Alamatian, J. (2021), "A new formulation for kinetic dynamic relaxation method based on the Lagrangian interpolation", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-15.
- [35] Zhang, L.G. and Yu, T.X. (1989), "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Computers & Structures*, Vol. 33, pp. 609-614.
- [36] Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Sowerby, R. (1997), "Analyses of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method", *Computers & Structures*, Vol. 65, pp. 561-574.
- [37] Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S. (1993), "Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 1339-1364.
- [38] Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S. (1994), "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3633-3657.
- [39] Lee, K.-S., Han, S.-E. and Hong, J.-W. (2014), "Post-buckling analysis of space frames using concept of hybrid arc-length methods", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 58, pp. 76-88.
- [40] Lee, K.S., Han, S.E. and Park, T. (2011), "A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 216-233.
- [41] گلمکانی، م. و یوسفیان، ن. (۱۳۹۳)، "تحلیل غیر خطی ترمولاستیک صفحات گرد ساندویچی با هسته تابعی"، *مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*، دوره ۴، شماره ۴، ص. ۱۴۲-۱۲۷.
- [42] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2009), "Dynamic relaxation method for tracing the statical path of truss structures", *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 3, pp. 27-39.
- [43] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2011), "Automatic DR structural analysis of snap-through and snap-back using optimized load increments", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 137, pp. 109-116.
- [44] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2016), "Finding equilibrium paths by minimizing external work in Methods in Applied Mechanics and Engineering", Vol. 191, pp. 959-974.
- [11] Toklu, Y.C. (2004), "Nonlinear analysis of trusses through energy minimization", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1581-1589.
- [12] Ligarò, S.S. and Valvo, P.S. (2006), "Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 4867-4887.
- [13] Saffari, H. and Mansouri, I. (2011), "Non-linear analysis of structures using two-point method", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 834-840.
- [14] Underwood, P. (1983), "Dynamic relaxation (in structural transient analysis)", *Computational Methods for Transient Analysis* (A 84-29160 12-64) Amsterdam, North-Holland, pp. 245-265.
- [15] Munjiza, A. (1996), "A  $K^m$  proportional damping for dynamic relaxation", *International Journal for Engineering Modelling*, Vol. 9, pp. 1-9.
- [16] Munjiza, A., Owen, D.R.J. and Crook, A.J.L. (1998), "An  $M(M^{-1}K)^m$  proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, pp. 1277-1296.
- [17] Rezaiee-Pajand, M. and Taghavian Hakkak, M. (2006), "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation", *International Journal of Engineering*, Vol. 19, pp. 11-22.
- [18] Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J. (2008), "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 996-1018.
- [19] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2008), "Nonlinear dynamic analysis by dynamic relaxation method", *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 28, pp. 549-570.
- [20] Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R. (2010), "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 7, pp. 627-654.
- [21] Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. (2010), "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, pp. 109-133.
- [22] Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Zhang, L.C. (2011), "A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 783-794.
- [23] Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R. (2011), "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 1274-1285.
- [24] Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J. (2012), "Timestep selection for dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, pp. 42-72.
- [25] Rezaiee-Pajand, M., Sarafrazi, S.R. and Rezaiee, H. (2012), "Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures", *Computers & Structures*, Vol. 112-113, pp. 295-310.
- [26] Rezaiee-Pajand, M. and Rezaee, H. (2012), "Fictitious time step for the kinetic dynamic relaxation method", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 21, pp. 631-644.
- [27] Alamatian, J. (2012), "A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation method with kinetic damping", *Computers & Structures*, Vol. 90, pp. 42-54.



dynamic relaxation method", Applied Mathematical Modelling, Vol. 40, pp. 10300-10322.

- [45] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2016), "Computing the structural buckling limit load by using dynamic relaxation method", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 81, pp. 245-260.

[46] عالمیان، ج. و حسینی نژاد گوشیک، س.م. (۱۳۹۶)، "روش رهایی پویا برای محاسبه بار کمانشی قاب‌ها"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز، دوره ۴۹، شماره ۹۶، ص. ۷۵-۷۴.

- [47] Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. (2020), "Finding buckling points for nonlinear structures by dynamic relaxation scheme", Frontiers of Structural and Civil Engineering, Vol. 14, pp. 23-61.

- [48] Rezaiee-Pajand, M. and Mohammadi-Khatami, M. (2021), "Nonlinear analysis of cable structures using the dynamic relaxation method", Frontiers of Structural and Civil Engineering, Vol. 15, pp. 253-274.

- [49] Taghavian Hakak, M. (2003), "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation method", Master of science Thesis, Islamic Azad University University (Kerman Branch), Kerman, Iran.

- [50] Greco, M., Menin, R., Ferreira, I. and Barros, F. (2012), "Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 41, pp. 735-750.

- [51] Krishnamoorthy, C.S., Ramesh, G. and Dinesh, K.U. (1996), "Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 22, pp. 109-142.

- [52] Williams, F. (1964), "An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 451-469.

- [53] Meek, J.L. and Tan, H.S. (1984), "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 261-282.

- [54] Sze, K.Y., Liu, X.H. and Lo, S.H. (2004), "Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 40, pp. 1551-1569.