



تعیین ضریب طول موثر ستون‌های بدون حرکت جانبی و با مقطع متغیر با استفاده از روش تفاضلات محدود

علی اصغر صفوی^۱، عباس حق‌اللهی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی، تهران

۲- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱، haghollahi@sru.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۴)

چکیده

در این مقاله تعیین بار کمانش خمشی ستون‌های با مقطع متغیر با روشی خاص ارائه می‌گردد (کمانش درون صفحه قاب). مسئله‌ی مورد نظر به صورت قاب یک دهانه متقارن مقید در برابر حرکت جانبی با تکیه‌گاه‌های مفصلی یا گیردار بررسی می‌شود. تحلیل مسئله بر اساس روش تفاضلات محدود و روش کار مجازی انجام می‌شود. به این صورت که طول ستون به n تکه تقسیم می‌شود و صورت تفاضل محدودی معادله دیفرانسیل برای جابجایی جانبی نقاط مرزی تکه‌ها نوشته می‌شود. با این کار $n-1$ معادله حاوی n متغیر (جابجایی نقاط) به دست می‌آید. کمبود یک معادله به خاطر نداشتن شرط مرزی در سر ستون است که با استفاده از روش کار مجازی معادله‌ی مورد نیاز حاصل می‌شود. دترمینان ماتریس ضرایب متناظر با دستگاه معادلات، مساوی با صفر قرار داده می‌شود و بار بحرانی به دست می‌آید. نتایج تحلیل درباره تعدادی مسئله گزارش گردیده و با نتایج حاصل از مطالعه سایر محققین مقایسه شده‌است. مقایسه نشان می‌دهد که روش ارائه شده به سادگی بار بحرانی قاب مورد بررسی را به دست می‌دهد و این فرمول‌بندی قابل تعمیم به سایر قاب‌هایی که از اعضای با مقطع متغیر ساخته شده‌اند، است.

واژگان کلیدی

سوله، ستون‌های با مقطع متغیر، کمانش خمشی، روش تفاضلات محدود، روش کار مجازی

Effective Length Coefficient of Web-Tapered Columns in Gable Frames with Finite Differences Methods for Non-sway Buckling

A. Safavy, A. Haqollahi

Abstract

In this paper, non-sway flexural buckling for non-prismatic columns is analyzed. The studied structures are one-bay gable frames, which are evaluated for in-plane buckling, and their two bases are hinged or rigid. The approach applied virtual work and finite difference methods. First, the length of the column is divided into " n " parts. Then the deformation differential equations of these parts are converted into finite difference forms. Thus " $n-1$ " linear equations with " n " variables are obtained. These variables are the lateral displacements of the specified points on the length of the column. Now, an equation is required to complete the system of linear equations. It can be obtained by employing the virtual work method. The equations' system corresponds to a matrix equation in which the coefficient matrix is a square matrix. By letting the determinant of this matrix be equal to zero, an n -degree linear equation is produced. The buckling load is the minimum root of this equation. The results are shown in dimensionless charts. To verify the results, some examples are solved with the introduced method and other methods. The comparison shows that the buckling load can be easily calculated using the introduced method with a good accuracy.

Keywords

Gable frames, Non-sway buckling, Non-prismatic columns, Finite differences method, Virtual work method



از روش‌های ثبت شده برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر می‌توان راه‌حل‌های Timoshenko [۱]، Morley [۲] و Dinnik [۳] را نام برد. تمامی این راه‌حل‌ها تقریبی بوده و ستون با استفاده از ستون‌های پله‌ای متوالی تقریب زده می‌شد. برای اولین بار، حلی برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های غیرمنشوری توسط Gere و Carter [۴] با استفاده از توابع بسط ارائه گردید. از راه‌حل‌های اخیر با روش تفاضلات محدود، کار Iremonger [۵] و از روش اجزای محدود مطالعه Karabalis و Beskos [۶] را می‌توان نام برد. Brown [۷] با تحلیل تغییرشکل‌های بال‌های تیر I-شکل غیرمنشوری در پیچش، معادله دیفرانسیل تغییرشکل مقطع را در پیچش غیریکنواخت بدست آورد. او معادله‌ی به‌دست آمده را در بررسی کمانش خمشی-پیچشی تیر غیرمنشوری با تکیه‌گاه‌های ساده مورد استفاده قرار داد و مشاهده کرد در اعضای با مقطع متغیر که بال آنها در طول عضو ثابت است، تاثیر تغییرات ابعاد جان در سختی پیچشی و در نتیجه کمانش پیچشی اندک است. Ermopoulos و Kounadis [۸] به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداختند. آنها روشی را برای پیدا کردن ماتریس سختی خمشی معادل عضو با مقطع متغیر ارائه نمودند و تابع تغییرشکل عضو منشوری معادل را برای تابع تغییرشکل یک عضو غیرمنشوری، در نظر گرفتند. Ermopoulos [۹] در تحقیقی دیگر به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداخت. پایداری اعضای با مقطع متغیر را -که تحت فشار توسط بارهای متمرکز در طول هستند- بررسی کرد. در آن تحقیق با فرمول‌بندی معادلات کمانش، بار بحرانی آنها محاسبه گردید و نتایج به‌صورت نمودارهایی ارائه شد. از نتایج قابل توجه این تحقیق طراحی بهینه اعضای غیرمنشوری فشاری می‌باشد. Banerjee و Williams [۱۰] تحقیقی را انجام دادند که نتیجه‌ی آن پاسخگوی دامنه‌ی وسیعی از اشکال هندسی سطح مقطع ستون‌های ماهیچه‌ای با تغییرات خطی ابعاد در تمام یا برخی از اجزای تشکیل دهنده‌ی مقطع (بال‌ها و یا جان) در طول عضو است. Yang [۱۱] پایداری تیرستون‌های I-شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار داد. در آن مطالعه رفتار قاب‌های صفحه‌ای بدون مهاربند -که از تیر و ستون‌های مقطع متغیر ساخته شده است- در تغییرشکل و حرکت جانبی قاب مورد بررسی قرار گرفت. Bradford [۱۲] در مقاله‌ای پس از به‌دست آوردن معادلات تعادل یک تیر I-شکل مقطع متغیر، تاثیر لنگر پیچشی را روی آن

با فرمول‌بندی روش اجزای محدود بررسی کرد. ایشان در تحقیق خود از روش کار مجازی، فرمول‌بندی لاگرانژین بهنگام شده استفاده کرد و تغییرشکل‌های غیرخطی هندسی را مورد ملاحظه قرار داد. Williams و Gary Aston [۱۳] با استفاده از روش اجزای محدود کمانش پیچشی-خمشی تیرهای با جان متغیر را بررسی کردند. آنها در تحقیق خود اثر پیچش و خمش را به صورت همزمان مطالعه کردند و برای ساده‌سازی مسئله، محور میانی جان را به‌عنوان یک محور مقطع -که حول آن مقطع دچار پیچیدگی می‌شود- در نظر گرفتند. ایشان با ساخت ماتریسهای سختی فرمول‌های لازم را به‌دست آوردند. Al-Gahtani [۱۴] در مقاله‌ای بر اساس روش‌های انرژی رفتار تیر-ستون‌های مقطع متغیر را در خمش و کمانش مورد مطالعه قرار داد. وی از آنالیز کمانش ناگهانی^۱ در مطالعه پایداری سازه‌ها استفاده نمود و به این نتیجه رسید که اگرچه ستون‌های مقطع متغیر ممکن است بار بحرانی بیشتری از ستون‌های منشوری هم‌وزن خود داشته‌باشند، اما استفاده از آنها در قاب‌های فضایی ممکن است بار بحرانی ناشی از کمانش ناگهانی کل سازه را کاهش دهد. Lei و Shu [۱۵] کمانش جانبی تیرهای I-شکل با مقطع متغیر را بررسی کردند. ایشان رابطه نیرو-تغییرشکل را برای انواع تغییرشکل‌های تیر محاسبه کردند. برای محاسبه انرژی پتانسیل کل در فرآیند کمانش جانبی تیر از روش‌های حساب تغییرات بهره جستند. Yau [۱۶] به پایداری تیرهای I-شکل با مقطع متغیر تحت لنگرهای پیچشی پرداخت. وی لنگر پیچشی اعمالی به مقطع را به صورت ترکیب پیچش سنت-وانانت و پیچش تابیدگی در نظر گرفت و تیر را به صورت سه تیر مجاور در نظر گرفت که مقطع آنها اجزای مقطع تیر اصلی (جان و دو بال) است. یکی از نتایج وی به دست آوردن ماتریس سختی هندسی و ماتریس سختی الاستیک خطی برای عضو با مقطع متغیر تحت لنگر پیچشی است. Asgarian و همکارانش [۱۷] مسئله کمانش جانبی-پیچشی تیرهای با مقطع دلخواه و متغیر در طول را بررسی کردند. ایشان از روش متکی بر سری‌های توانی بهره گرفته و انرژی پتانسیل کل را با توجه به انرژی ارتجاعی و کار بارهای خارجی محاسبه کردند. تقریب سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه ۴ مورد استفاده واقع شد. بارهای کمانش جانبی با حل مسئله مقدار ویژه محاسبه شد. Soltani و همکارانش [۱۸] در مقاله‌ای تحلیل ناپایداری ارتجاعی کمانش خمشی-پیچشی و ارتعاش آزاد تیرهای با مقطع متغیر را با روش سری‌های توانی انجام دادند.



ایشان معادلات تعادل و معادله حرکت برای ارتعاش آزاد را با ایستا کردن انرژی پتانسیل کل تیر-ستون با مقطع دلخواه به دست آوردند. Soltani و همکارانش [۱۹] در تحقیقی مشابه پژوهش پیشین براساس روش سری‌های توانی و با توجه به اصل کار مجازی، ماتریس‌های جرم و سختی را برای تحلیل ارتعاش آزاد و برای تعیین بار کماتش خمشی-پیچشی در تیر با مقطع متغیر و شکل دلخواه ساختند. توابع شکل موردنیاز برای ساخت ماتریس سختی با کمک مشتق‌گیری از سری‌های توانی -که تقریبی از توابع جابجایی بود- به دست آمد. Kováč [۲۰] کماتش جانبی-پیچشی تیرهای I-شکل با مقطع متغیر را بررسی کرد. وی معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر با مقطع منشوری را با انجام اصلاحاتی برای تیر با مقطع متغیر به کار برد. با بررسی هندسه تغییرشکل مقطع در حین کماتش جانبی-پیچشی تیر و به کار بستن روش رایلی-ریتز و روش باقیمانده‌های وزن‌دار در حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل، مسئله موردنظر را حل کرد. Kazemi و Rahai [۲۱] تحلیل کماتشی ستون‌های غیرمنشوری را براساس مودهای ارتعاشی و روش‌های انرژی انجام دادند. ایشان در این مطالعه به با کار بستن شکل‌های مودی ارتعاش و اصل ایستا کردن انرژی پتانسیل کل، بار بحرانی کماتش ستون را به دست آوردند. Bradford و Valipour [۲۲] در پژوهشی تابع شکل تیر با مقطع متغیر و تکیه گاه‌های ارتجاعی را معرفی کردند. ایشان در این تحقیق از اصل کار مجازی استفاده کردند و فرمول بندی را بر اساس فرض اوپلر-برنولی، رفتار ارتجاعی برای مصالح و عدم رخداد کماتش موضعی به دست آوردند. نهایتاً دقت و کارایی روش خود را با روش استفاده از توابع شکل هرمیتی و روش سایر محققین مقایسه کردند. Konstantakopoulos و همکارانش [۲۳] پایداری یک تیر-ستون تنها را با انواع اشکال تغییر مقطع در طول عضو بررسی کردند. از جمله اشکال تغییر مقطع در طول عضو می‌توان به صور پله‌ای، شیب‌دار به یک سمت و افزایش عمق عضو از طرفین به سمت میانه طول تیر اشاره کرد. ایشان در طرفین تیر-ستون مزبور تکیه گاه‌های مفصلی و غلطکی قرار داد، علاوه بر نیروی فشاری اعمالی، اثر لنگرها، نیروهای محوری متمرکز و تغییرشکل‌های اولیه را در تحلیل مسئله بررسی کردند. Darbandi و همکارانش [۲۴] با روش تئوری اختلالات به کماتش ستون‌های با مقطع متغیر پرداختند. در روند حل با برابر قرار دادن جملات هم‌درجه از پارمتر اختلال، ضرایب جواب مشخص گردید. در آن تحقیق به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش خمشی ستون با رفتار

اوپلر-برنولی به روش مذکور پرداخته شد. Hadidi و همکارانش [۲۵] به تحلیل غیرخطی مرتبه دوم تیرهای با مقطع متغیر پرداختند. ایشان در فرایند حل معادله دیفرانسیل تغییرشکل از روش سری‌های توانی استفاده کردند. ایشان حضور بارهای متمرکز در طول تیر را نیز در نظر گرفتند. به علاوه یک برنامه رایانه‌ای با نرم افزار MATLAB را تهیه کردند. Wei و همکارانش [۲۶] کماتش خمشی ستون‌های غیرمنشوری را که در معرض بار متمرکز انتهایی و بارگسترده هستند، بررسی کردند. ایشان معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل حین کماتش ستون با شرایط انتهایی گوناگون را به صورت معادله انتگرال در آورده، کم‌ترین مقدار ویژه متناظر با معادله انتگرال را به دست آوردند و در مثال‌هایی تاثیر ضریب تغییر عمق مقطع را در بار بحرانی بررسی کردند. پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های با مقطع متغیر که در انتها دارای فنرهای الاستیک هستند با روش تربیع دیفرانسیلی توسط Taha و Essan [۲۷] انجام گردید. ایشان پس از به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش و کماتش ستون، از روش تربیع دیفرانسیلی در حل تقریبی معادله دیفرانسیل استفاده کردند. در این روش از دامنه تابع جواب، نقاطی به عنوان نقاط نمونه انتخاب می‌گردد و مقدار مشتق مراتب مختلف تابع جواب در هر نقطه برحسب مجموع مقدار وزن‌دار تابع در سایر نقاط نمونه نوشته می‌شود. Shooshtari و Khajavi [۲۸] روشی را برای یافتن توابع شکل و ماتریس سختی تیرهای غیرمنشوری معرفی کردند. مطالعه ایشان شامل حالات تغییرات خطی و ناگهانی در عمق تیر می‌شود. در این پژوهش حرکت‌های جسم صلب از تابع کرنش‌ها جدا گردید و توابع درونابی کرنش برحسب تغییرشکل‌های گرهی المان تیر به دست آمد و با این کار درایه‌های ماتریس سختی به دست آمد. ایشان بار بحرانی و فرکانس مود اول را با تقریب خوب محاسبه کردند. Ruocco و همکارانش [۲۹] روش مدل میله هنکی را برای تحلیل کماتش خمشی ستون‌های غیر منشوری به کار بستند. در این مدل، ستون مورد نظر به چندین تکه ستون صلب تقسیم می‌شود که هر دو ستون صلب مجاور با یک فنر دورانی به هم متصل شده‌اند. سختی دورانی هر فنر بر مبنای ممان اینرسی مقطع ستون در آن محل محاسبه می‌شود. بار بحرانی مود اول کماتش ستون اولیه تقریباً با کوچک‌ترین ریشه معادله‌ای برابر است که در آن دترمینان ماتریس ضرایب با مقدار صفر برابر است. دقت جواب بستگی به تعداد تکه‌های صلب دارد. Nikolic و Šalinic [۳۰] به تعیین بار بحرانی کماتش خمشی



ستون‌های غیر منشوری با روشی مشابه مدل میله هنکی، موسوم به روش میله‌های صلب چندگانه^۲ پرداختند. در این روش بین هر دو تکه ستون صلب مجاور دو فنر (دورانی و انتقالی) در نظر گرفته شده است. تغییر طول فنرهای انتقالی متناظر با جابجایی جانبی هر نقطه از ستون در کمانش بوده و ستون‌های غیر منشوری مورد مطالعه شامل ستون‌ها با تغییرات پیوسته مقطع و ستون‌های پله‌ای^۳ است.

آنچه تاکنون اشاره شد، تحقیقات انجام شده روی ستون‌های ماهیچه‌ای منفرد بود. تحقیقات انجام شده روی رفتار و پایداری ستون‌های غیر منشوری تشکیل دهنده‌ی قاب‌ها، در ادامه به آن اشاره شده است:

راه‌حل تقریبی Lee و همکارانش [۳۱] که با استفاده از روش ریلی-ریتز و با الهام از روش سری‌های توانی و حساب تغییرات انجام شده که نتیجه‌ی آن یک سری نمودار با علائم و پارامترهای مشابه نمودارهای ژولیان و لورنس بوده است. در این روش قاب موردنظر با اعضای مقطع متغیر به یک قاب ساده‌ی چهارگوش - که دارای دو ستون (در طرفین) و دو تیر (در بالا و پایین) است - تبدیل می‌شود. در قاب جدید ستون‌ها همان ستون‌های قاب قبلی و تیرها دارای مقطع ثابت هستند، ممان اینرسی تیر بالا و پایین به ترتیب، بر مبنای سختی تیرهای متصل به سر ستون‌ها و صلیب خمشی تکیه‌گاه پای ستون‌ها تعیین می‌شود. راه‌حل تقریبی پیشنهادی Irani [۳۲] با یک سری فرضیات و حل معادله‌ی دیفرانسیل تقریبی کمانش قاب با اعمال شرایط تعادل و پیوستگی در گره‌های انجام دادند. Bazeos و Karabalis [۳۳] برای محاسبه‌ی بار بحرانی قاب‌های صفحه‌ای دارای مقطع متغیر روشی ارائه کردند. در این روش با بدست آمدن ماتریس سختی کل سازه بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییر شکل ستون، بار بحرانی ستون‌های قاب بدست آمد. Saffari و همکارانش [۳۴] با در نظر گرفتن سهمی درجه‌ی دو برای تغییرات تابع ممان اینرسی ستون و تیر در یک قاب شیب‌دار یک دهانه‌ی متقارن، مسئله را بررسی کرده و حاصل تلاش آنها نمودارهای بدون بعد بوده است. Momeni و Taji-Zadegan [۳۵]، Riahi و همکارانش [۳۶] در مقالات جداگانه و مشابه، با کمک روابط شیب افت در حضور نیروی محوری برای عضو با مقطع متغیر و استفاده از روابطی که در مقاله Lee و همکارانش [۳۱] آمده است، نمودارهای ضریب طول موثر سوله‌های تک دهانه را برای حالات کمانش با حرکت جانبی آزاد و مقید ترسیم کردند. در هر دو مقاله اخیر از سهم ممان اینرسی جان در ممان اینرسی مقطع صرف نظر شده است. Rezaiee-Pajand و

همکارانش [۳۷] در مقاله‌ای پایداری قاب‌های پرتال (با ستون‌های مقطع متغیر و با اتصالات نیمه‌گیردار به تیر) را بررسی کردند و حالات حرکت جانبی آزاد و مقید را برای قاب در نظر گرفتند. تابع ممان اینرسی مقطع ستون را با یک تک‌جمله‌ای جبری درجه‌ی n از متغیر طول (x) تقریب زده و در معادله دیفرانسیل تغییر شکل استفاده شد. در مدل ایشان برخلاف سوله‌های متداول، تیر افقی و با مقطع منشوری در نظر گرفته شده است. در مطالعه‌ای دیگر از نویسندگان مقاله حاضر، کمانش خمشی سوله‌هایی با ستون‌های آزاد در برابر حرکت جانبی بررسی شده است [۳۸]. بررسی مسئله برای حالت مقید در برابر حرکت جانبی نسبت به حالت قبلی دشوارتر و در این مقاله انجام شده است. دشواری مسئله ناشی از افزایش نامعینی به‌خاطر قید جابجایی در سر ستون‌هاست. در این تحقیق برای تعیین بار بحرانی ستون‌ها از معادله دیفرانسیل تغییر شکل و در حل آن روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. به این صورت که طول ستون به n تکه تقسیم می‌شود و صورت تفاضل محدودی معادله دیفرانسیل برای جابجایی جانبی نقاط مرزی تکه‌ها نوشته می‌شود. با این کار $n-1$ معادله حاوی n متغیر (جابجایی نقاط) به دست می‌آید. کمبود یک معادله به خاطر نداشتن شرط مرزی در سر ستون است که با استفاده از روش کار مجازی معادله‌ی مورد نیاز یافته می‌شود. برای تعیین بار بحرانی، دترمینان ماتریس ضرایب متناظر با معادلات مزبور محاسبه شده و معادل با صفر قرار داده می‌شود. کم‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی اخیر همان بار بحرانی مود اول کمانش است.

۲- روش تفاضلات محدود

این روش برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به کار می‌رود. در این روش دامنه تابع به بازه‌هایی با طول محدوده‌های مساوی تقسیم می‌شود و مشتق مراتب مختلف در هر نقطه با داشتن مقادیر تابع در نقاط مجاور آن نقطه، قابل تخمین خواهد بود. رابطه تفاضل بالایی، میانی و پایینی در تخمین مشتق اول تابع v در نقطه دلخواه λ_m به صورت معادلات (۱) تا (۳) تعریف شده است:

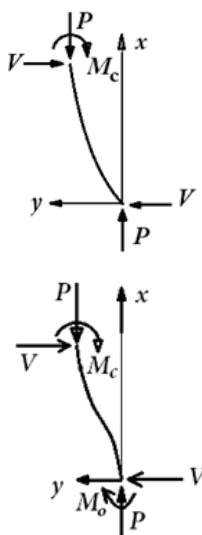
$$v'_i \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \quad (1)$$

$$v'_i \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \quad (2)$$

$$v'_i \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \quad (3)$$

h طول محدوده هر بازه است. ضمناً رابطه تفاضل میانی برای مشتق دوم تابع v در نقطه‌ی λ_m به صورت معادله (۴) است.





شکل ۲- دیاگرام آزاد تکیه‌ای از ستون کمانش یافته
سازه‌های (I) و (II)

اکنون می‌توان صورت تفاضل محدودی معادلات (۵-۱) و (۵-۲) را نوشت. مقدار پارامترها در نقطه نام از ستون با اندیس i نمایش داده شده است. اگر طول ستون به n قسمت مساوی تقسیم شود و طول هر ناحیه با h نشان داده شود، نقطه نام از ستون در فاصله ih از پای ستون واقع است.

$$M_i = Pv_i - Vx_i = -EI_i v''_i \quad (6-1)$$

$$= -\frac{EI_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), \quad x_i = ih$$

$$M_i = Pv_i - Vx_i - M_o = -EI_i v''_i \quad (6-2)$$

$$= -\frac{EI_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), \quad x_i = ih$$

معادله تعادل لنگر متناظر با شکل (۳) به صورت معادلات (۷-۱) و (۷-۲) خواهد بود. توجه شود که مقادیر جابجایی جانبی در پای ستون و سر آن در کمانش مقید، مساوی صفر است ($v_o = v_n = 0$):

$$V = -\frac{M_n}{l} = \frac{EI_n}{lh^2}(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) \quad (7-1)$$

$$= -\frac{EI_n}{lh^2}(v_{n+1} + v_{n-1})$$

$$V = -\frac{M_o + M_n}{l} \quad (7-2)$$

$$= \frac{2EI_o}{lh^2}v_1 + \frac{EI_n}{lh^2}(v_{n+1} + v_{n-1})$$

پارامتر M_n معرف مقدار لنگر خمشی داخلی در نقطه نام ستون (سر ستون) است (شکل (۳)). از ترکیب معادلات (۶) و (۷) معادله (۸) حاصل می‌شود، به طریقی مشابه معادله (۸-۲) به دست می‌آید:

$$v''_i \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \quad (4)$$

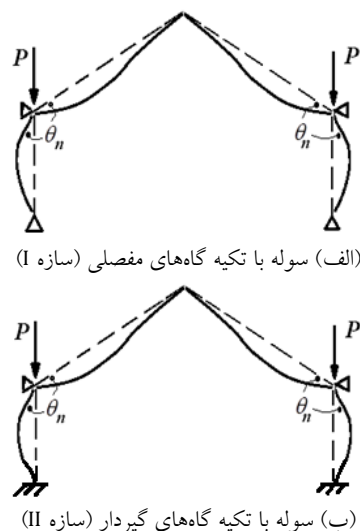
۳- مشخصات مدل سازه و نحوه به کار بستن روش تفاضلات محدود

سازه‌های مورد نظر سوله‌های تک‌دهانه هستند که مسئله کمانش ستون‌های آنها برای حالت مقید در برابر حرکت جانبی بررسی شده است. در تعیین بار بحرانی کمانش خمشی از تلفیق روش‌های تفاضلات محدود و کار مجازی استفاده شده است. الگوی بارگذاری و شکل کمانش یافته سوله مطابق شکل (۱) است. سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار به ترتیب با سازه (I) و سازه (II) در این شکل و سایر اشکال معرفی شده است، ضمناً شماره معادلات مختص به سازه (II) با اعداد پریم‌دار نشان داده شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرشکل جانبی ناشی از خمش به صورت $M(x) = -EI(x)v''(x)$ است که در آن $M(x)$ ، $I(x)$ و $v(x)$ به ترتیب توابع لنگر خمشی، ممان اینرسی (حول محور خمش) و جابجایی جانبی عضو هستند. پارامتر x هم معرف متغیر مستقل مکان مقطع مورد بررسی در طول عضو و E ضریب الاستیسیته مصالح ستون است. تابع لنگر خمشی ستون (M_c) با توجه به شکل (۲) نوشته می‌شود:

$$M_c = Pv - Vx = -EI_c v'' \quad (5-1)$$

$$M_c = Pv - Vx - M_o = -EI_c v'' \quad (5-2)$$

به طوریکه V و M_o به ترتیب، مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در پای ستون‌ها در سازه مورد نظر است (شکل (۲)).



شکل ۱- وضعیت سازه بارگذاری شده قبل و بعد از کمانش

$$v_1[A - 2I_1 - 2I_0(1+h)] + v_2I_1 - v_{n-1}\left(\frac{1}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{1}{n}I_n\right) = 0 \quad (10-2)$$

$$v_{n-3}I_{n-2} + v_{n-2}(A - 2I_{n-2}) + v_{n-1}\left(I_{n-2} - \frac{n-2}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{n-2}{n}I_n\right) = 0 \quad (11-1)$$

$$-2I_0[1 + (n-2)h]v_1 + v_{n-3}I_{n-2} + v_{n-2}(A - 2I_{n-2}) - v_{n-1}\left(I_{n-2} - \frac{n-2}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{n-2}{n}I_n\right) = 0 \quad (11-2)$$

$$v_{n-2}I_{n-1} + v_{n-1}\left(A - 2I_{n-1} - \frac{n-1}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{n-1}{n}I_n\right) = 0 \quad (12-1)$$

$$-2I_0[1 + (n-2)h]v_1 + v_{n-2}I_{n-1} + v_{n-1}\left(A - 2I_{n-1} - \frac{n-1}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{n-1}{n}I_n\right) = 0 \quad (12-2)$$

نهایتاً $n-1$ سطر از ماتریس ضرایب هر سازه (I و II) ساخته می‌شود، درحالی‌که بردار جابجایی‌ها شامل n متغیر است. با نوشتن یک معادله‌ی خطی دیگر بین متغیرهای جابجایی می‌توان سطر آخر ماتریس ضرایب را ساخته و به یک ماتریس مربعی مناسب برای استفاده‌های بعدی دست یافت. تک معادله موردنیاز برای هر سازه با روش کار مجازی به دست خواهد آمد (روابط روش کار مجازی ساده‌تر از سایر روش‌ها از جمله روش کاسیگلیانو است). با ساخته شدن ماتریس ضرایب و درمیان‌گیری از آن یک چند جمله‌ای خطی درجه n از پارامتر P (نیروی فشاری ستون) حاصل می‌شود که با برابر قرار دادن آن با صفر معادله‌ای حاصل می‌شود که کمترین ریشه آن همان بار بحرانی ستون است.

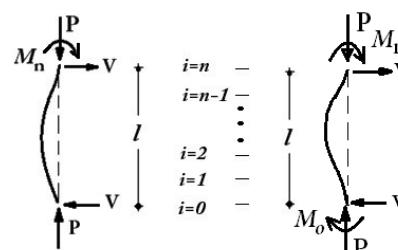
$$[K]_{n \times n} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1(n-1)} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2(n-1)} & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ K_{(n-2)1} & K_{(n-2)2} & \dots & K_{(n-2)(n-1)} & K_{(n-2)n} \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-1)2} & \dots & K_{(n-1)(n-1)} & K_{(n-1)n} \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{n(n-1)} & K_{nn} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\{v\}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$

همه درایه‌های غیر صفر سطور اول تا $n-1$ ام ماتریس ضرایب K در پیوست آمده است.

$$Pv_i - i \times \frac{EI_n}{lh}(v_{n+1} + v_{n-1}) = -\frac{EI_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \quad (8-1)$$

$$-\frac{2EI_0}{h^2}(1 + ih)v_1 + Pv_i - i \times \frac{EI_n}{lh}(v_{n+1} + v_{n-1}) = -\frac{EI_i}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \quad (8-1)$$



شکل ۳- دیاگرام آزاد کل ستون و شماره‌گذاری نقاط مختلف ستون برای سازه‌های (I) و (II)

با ضرب نمودن طرفین دو معادله اخیر در h^2/E انتقال همه جملات به یک سمت تساوی، دانستن $h/l = 1/n$ و نامیدن $A = (Ph^2)/E$ می‌توان معادلات (9-1) و (9-2) را به دست آورد:

$$v_{i-1}I_i + v_i(A - 2I_i) + v_{i+1}I_i - v_{n-1}\left(\frac{i}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{i}{n}I_n\right) = 0 \quad (9-1)$$

$$2I_0(1 + ih)v_1 + v_{i-1}I_i + v_i(A - 2I_i) + v_{i+1}I_i - v_{n-1}\left(\frac{i}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{i}{n}I_n\right) = 0 \quad (9-2)$$

در دو معادله اخیر با جایگذاری اعداد صحیح مثبت به جای i ، برای هر سازه (I و II) یک دستگاه معادلات خطی حاصل می‌شود که قابل تبدیل به صورت معادله ماتریسی $[K]\{X\} = \{0\}$ است. ماتریس K ، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و بردار X ، بردار جابجایی‌های جانبی (شامل v_i ها) است. بردار جابجایی‌ها شامل n متغیر $(v_{i(1 \leq i \leq n-1)}, v_{n+1})$ است. هر سطر ماتریس ضرایب با در نظر گرفتن شماره‌ی آن سطر بجای i در معادله (9-1) و (9-2) قابل حصول است، مثلاً سطور اول، $n-1$ و $n-2$ ام براساس سه جفت معادله بعدی به دست می‌آیند:

$$v_1(A - 2I_1) + v_2I_1 - v_{n-1}\left(\frac{1}{n}I_n\right) - v_{n+1}\left(\frac{1}{n}I_n\right) = 0 \quad (10-1)$$



برای بسط دادن معادله (۱۴)، ابتدا با کمک شکل‌های (۲)، (۵)، (۶) و (۷) توابع لنگر برای بارگذاری مجازی و حقیقی تعیین می‌گردند:

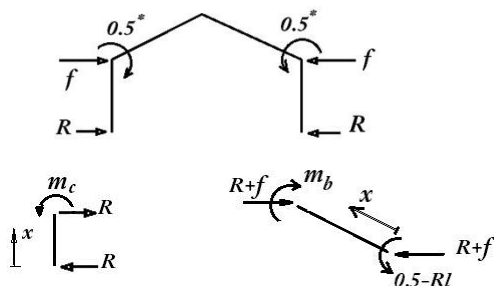
$$m_c = Rx \quad (۱۵-۱)$$

$$m_b = \frac{1}{2} [1 - 2Rl - 2(R+f)x \sin \alpha] \quad (۱۵-۲)$$

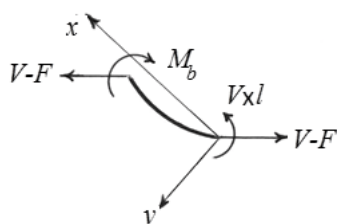
$$M_c = Pv - Vx \quad (۱۶-۱)$$

$$M_b = Vl + (V - F)x \sin \alpha \quad (۱۶-۲)$$

در این معادلات f و R به ترتیب، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سر و پای ستون در بارگذاری مجازی است (شکل (۶)). α هم زاویه شیب تیر مورب است. دستگاه مختصات مربوط به همه توابع در تیر (لنگر خمشی مجازی و حقیقی، ممان اینرسی) باید یکسان و براساس شکل (۶) و (۷) در نظر گرفته شود. در ستون هم باید دستگاه مختصات توابع مختلف فوق منطبق باشند.



شکل ۶- دیاگرام آزاد کل سازه و بخش‌هایی از ستون و تیر سمت راست سازه در بارگذاری مجازی



شکل ۷- دیاگرام آزاد یک تکه از تیر تغییرشکل یافته در دستگاه مختصات آن در بارگذاری حقیقی

با توجه به مختصات تغییرشکل تیر (شکل (۷))، v'_b (مشتق تابع جابجایی تیر) در مجاورت اتصال به ستون مقداری مثبت است و برابر با θ_n است. از طرفی مقدار لنگر خمشی داخلی تیر در لحظه کمایش برابر با Vl است، نتیجتاً مقدار انرژی ارتجاعی دو تیر برابر با مقداریست که در ادامه آمده است:

اکنون باید تک معادله موردنیاز را برای مربعی کردن ماتریس ضرایب به دست آورد. برای اجتناب از طولانی شدن متن، دو بخش بعدی تنها برای سازه (I) آورده شده است، لیکن نتیجه نهایی که حصول تک معادله مورد نیاز است با توضیحی کوتاه برای سازه (II) هم آورده خواهد شد.

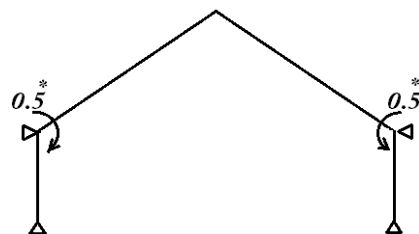
۴- روش کار مجازی در یافتن تک معادله موردنیاز

دو لنگر مجازی 0.5^* منطبق بر جهت دوران سر ستون‌ها در شکل کمانشی (شکل (۱)) به سر دو ستون اعمال می‌شود (شکل (۴)). اندازه دوران سر ستون‌ها با θ_n نشان داده می‌شود که با مقدار v' در آن نقطه برابر است (با توجه به دستگاه مختصات تغییرشکل ستون، v' در سر ستون مقداری منفی است). حال برابری کار مجازی داخلی و خارجی نوشته می‌شود:

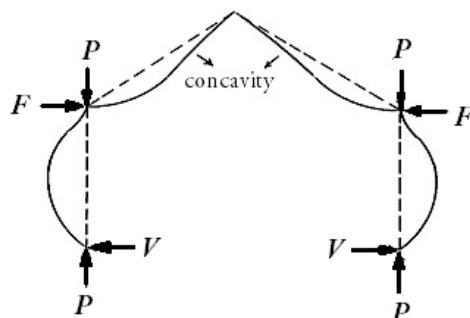
$$2 \times (0.5^* \times \theta_n) = -\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = \sum \int \frac{mM}{EI} dx \quad (۱۴)$$

$$= 2 \int \frac{m_c M_c}{EI_c} dx + 2 \int \frac{m_b M_b}{EI_b} dx$$

در این معادله m و M به ترتیب معرف توابع لنگر خمشی مجازی و حقیقی در اعضای سازه هستند، ضمناً c و b اندیس‌های مربوط به ستون و تیر است. مقصود از لنگر خمشی حقیقی، لنگر خمشی داخلی اعضا در سازه‌ی کمایش یافته، است.



شکل ۴- نحوه اعمال لنگر مجازی در سر ستون‌ها



شکل ۵- بارهای خارجی در لحظه کمایش سازه با تکیه‌گاه‌های مفصلی پای ستون (بارگذاری حقیقی)

$$1^* \times \theta_n = -\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = \int_0^l \frac{(Pv - Vx) \times 2Rx}{EI_c} dx + \int_0^s \frac{[1 - 2Rl - 2(R+f)x \sin \alpha] \cdot Vl \left(1 - \frac{I_{44}}{I_{55}} x\right)}{EI_b} dx \quad (25)$$

همچنانکه قبلاً اشاره شد $h = l/n$ ضمناً برای کوتاه‌تر کردن عبارات روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$I_{00} = \int_0^l \frac{dx}{I_c}, \quad I_{11} = \int_0^l \frac{x}{I_c} dx, \quad I_{22} = \int_0^l \frac{x^2}{I_c} dx, \quad I_{33} = \int_0^s \frac{dx}{I_b} \quad (26)$$

با توجه به معادلات (۲۲) و (۲۶)، مقدار انتگرال معین دوم در معادله (۲۶) با عبارات ساده‌تر بیان می‌شود. ضمناً مقدار $\int_0^l \frac{Pv \times 2Rx}{I_c} dx$ را می‌توان با صورت سری آن جایگزین کرد. بدین ترتیب معادله (۲۷) به دست می‌آید:

$$E\theta_n = -E \frac{(v_{n+1} - v_{n-1})}{2h} = 2RPh^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{iv_i}{I_i} - 2RV I_{22} + Vl(1 - 2Rl) \left[I_{33} - \frac{I_{44}^2}{I_{55}} \right] \quad (27)$$

معادله اخیر به پارامتر f وابسته نیست. با انتقال جملات به یک سمت تساوی و فاکتورگیری از V معادله بعد حاصل می‌شود:

$$E \frac{(v_{n+1} - v_{n-1})}{2h} + 2RPh^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{iv_i}{I_i} + V \left\{ -2RI_{22} + l(1 - 2Rl) \left[I_{33} - \frac{I_{44}^2}{I_{55}} \right] \right\} = 0 \quad (28)$$

پارامتر V را در معادله اخیر را می‌توان با مقدار معادل آن از معادله (۷) جایگزین کرد:

$$E \frac{(v_{n+1} - v_{n-1})}{2h} + 2RPh^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{iv_i}{I_i} + \frac{EI_n}{lh^2} \left\{ -2RI_{22} + l(1 - 2Rl) \left[I_{33} - \frac{I_{44}^2}{I_{55}} \right] \right\} \times (v_{n+1} - v_{n-1}) = 0 \quad (29)$$

بنابراین درایه‌های غیر صفر سطر n م ماتریس ضرایب محاسبه می‌گردد (برای سازه (I)):

$$K_{n1} = 2RPh^2 \frac{1}{I_1}, \quad K_{ni} = 2RPh^2 \frac{i}{I_i}, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad K_{n(n-1)} = -\frac{E}{2h} + 2RPh^2 \frac{n-1}{I_{n-1}} +$$

$$U_b = 2 \times \frac{1}{2} Vl \theta_n \quad (17)$$

θ_n با توجه به معادله دیفرانسیل تغییرشکل تیر قابل محاسبه است:

$$V''_b = -\frac{M_b}{EI_b} \rightarrow (v'_b)_0^s = 0 - \theta_n = -\theta_n = \quad (18)$$

v_b, M_b, I_b و s به ترتیب، توابع جابجایی، لنگر خمشی (بارگذاری حقیقی) و ممان اینرسی تیر و طول آن است. شایان ذکر است که در سوله تغییرشکل یافته ناشی از کماتش، دوران در راس سوله صفر است. با تلفیق معادلات (۱۷) و (۱۸) و دانستن آنکه انرژی ارتجاعی خمشی مجموع دو تیر برابر با $U_b = 2 \times \int_0^s \frac{M_b^2}{2EI_b} dx$ می‌توان نوشت:

$$U_b = \int_0^s \frac{[Vl + (V-F)x \sin \alpha]^2}{EI_b} dx \quad U_b = Vl \theta_n = Vl \int_0^s \frac{Vl + (V-F)x \sin \alpha}{EI_b} dx \quad \left. \begin{aligned} & \int_0^s \frac{[Vl + (V-F)x \sin \alpha]^2}{EI_b} dx = \\ & Vl \int_0^s \frac{Vl + (V-F)x \sin \alpha}{EI_b} dx \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (19)$$

با ساده سازی معادله اخیر می‌توان معادله بعد را نوشت:

$$\int_0^s \frac{Vl(V-F)x \sin \alpha + [(V-F)x \sin \alpha]^2}{I_b} dx = 0 \quad (20)$$

در سوله‌های متداول که تیرها افقی نیستند ($\alpha \neq 0^\circ$)، مقدار $(V-F)F \sin \alpha$ غیر صفر خواهد بود (مقادیر V و F نیز با توجه به معادله (۲-۱۶)، نمی‌توانند برابر باشند). بنابراین می‌توان طرفین معادله (۲۰) را بر $(V-F)F^2 \sin \alpha$ تقسیم و معادله (۲۱) را نتیجه گرفت:

$$l\eta I_{44} + (\eta - 1)I_{55} \sin \alpha = 0 \quad (21)$$

به طوریکه:

$$I_{44} = \int_0^s \frac{x}{I_b} dx, \quad I_{55} = \int_0^s \frac{x^2}{I_b} dx, \quad \eta = \frac{V}{F} \quad (22)$$

به سادگی می‌توان معادله (۲۱) را حل کرد و نسبت η را به دست آورد:

$$\eta = \frac{I_{55} \sin \alpha}{lI_{44} + I_{55} \sin \alpha} \quad (23)$$

با به کار بردن معادله (۲۳) می‌توان تابع لنگر خمشی تیر (معادله (۲-۱۶)) را ساده تر نوشت:

$$M_b = Vl \left(1 - \frac{I_{44}}{I_{55}} x \right) \quad (24)$$

اکنون معادله کار مجازی (شماره (۱۴)) به معادله (۲۵) تبدیل می‌شود:



در دو درایه‌ی انتهایی سطر آخر، مقدار S با عبارت:

$$S = \int_0^S \frac{\left(1 - \frac{I_{44}}{I_{55}}x\right)[1 - 2Rl - 2(R+f)x\sin\alpha + m_0]}{I_b} dx$$

می‌شود. مقادیر نامشخص عکس‌العمل‌های مجازی با روش‌های تحلیل سازه‌ها قابل تعیین است. به عنوان مثال در سازه (I) مقادیر R و f از معادله ماتریسی بعد به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} R \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_{11} &= I_{22} + l^2 I_{33} + 2lI_{44}\sin\alpha + I_{55}\sin^2\alpha, \\ a_{12} &= I_{55}\sin^2\alpha + lI_{44}\sin\alpha, \\ a_{21} &= lI_{44} + I_{55}\sin\alpha, \\ a_{22} &= I_{55}\sin\alpha, \\ b_1 &= 0.5(lI_{33} + I_{44}\sin\alpha), \\ b_2 &= 0.5I_{44} \end{aligned} \quad (34)$$

۵- رسم نمودارها

از آنجایی که پارامترهای بی‌بعد در رسم و استفاده از نمودارها مناسب‌تر از پارامترهای بعددار هستند، ضریب طول موثر، پارامتر مناسب‌تری از بار بحرانی در ترسیم نمودارهاست. رسم نمودار با توجه به وجود پارامترهای مکانیکی و هندسی فراوان (شکل ۸) بسیار سخت به نظر می‌رسد. با دو ترفندی که در ادامه معرفی می‌شود، انجام این کار سهل می‌گردد. اولاً چون تمام اعضا از یک مصالح ساخته شده است، ضریب طول موثر به مقدار ضریب الاستیسیته وابسته نیست و می‌توان در محاسبات رسم نمودار مقدار آن را عددی دلخواه مثلاً معادل با واحد در نظر گرفت. ثانیاً در سوله‌هایی که به لحاظ ابعاد هندسی اعضا متشابه هستند، ضریب طول موثر ستون‌های متناظر آن‌ها یکسان است، مثلاً می‌توان سوله‌ای متشابه با سوله‌ی موردنظر ترسیم کرد که در آن طول ستون‌ها واحد و طول تیرها (S/l) معادل با حاصل تقسیم طول تیرها بر طول ستون در سوله موردنظر باشد. آنگاه محاسبه تعیین ضریب طول موثر را می‌توان برای سوله متشابه انجام داد (شکل ۹).

نمودارهای ضریب طول موثر در دستگاه مختصات متعامد رسم می‌شود، محور قائم پارامتر ضریب طول موثر (K_γ) و محور افقی نسبت طول تیر مورب به طول ستون (S/l) است. در هر دستگاه مختصات چند منحنی رسم می‌شوند که در همه‌ی آنها مقادیر γ و β ثابت است $(\gamma = d_{TOP}/d_0 - 1)$. هر منحنی برای مقدار مشخصی از r رسم می‌گردد (شکل ۸).

$$\begin{aligned} & \frac{EI_n}{lh^2} \left\{ -2RI_{22} + l(1 - 2RI) \left[I_{33} - \frac{I_{44}^2}{I_{55}} \right] \right\}, \\ K_{nm} &= \frac{E}{2h} + \frac{EI_n}{lh^2} \left\{ -2RI_{22} + l(1 - 2RI) \left[I_{33} - \frac{I_{44}^2}{I_{55}} \right] \right\} \quad (30-1) \end{aligned}$$

برای سازه (II) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 1^* \times \theta_n &= -\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = \\ & \int \frac{(Pv - Vx - M_0) \times 2(Rx - m_0)}{EI_c} dx + \\ & \int \left(\frac{[M_0 + Vl - (F + V)x\sin\alpha]}{EI_b} \times \right. \\ & \left. \frac{[1 - 2Rl - 2(R + f)x\sin\alpha + m_0]}{1} dx \right) \end{aligned} \quad (30-2)$$

f و R عکس‌العمل‌های نیرویی ناشی از بارگذاری مجازی در سازه (II) است. m_0 هم عکس‌العمل خمشی پای ستون در آن بارگذاری است. با دانستن $M_0 + Vl = \frac{I_{44}}{I_{55}\sin\alpha} (M_0 + Vl)$ و $F + V$ با کمک معادله (۷-۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -E \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} &= \\ 2 \left[PRh^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{iv_i}{I_i} - V(RI_{22} - m_0I_{11}) - \right. \\ & \left. m_0Ph \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i}{I_i} - M_0(RI_{11} - m_0I_{00}) \right] + \\ & (M_0 + Vl) \int_0^s \left(\frac{\left(1 - \frac{I_{44}}{I_{55}}x\right)}{I_b} \times \right. \\ & \left. \frac{[1 - 2Rl - 2(R + f)x\sin\alpha + m_0]}{1} dx \right) \end{aligned} \quad (31)$$

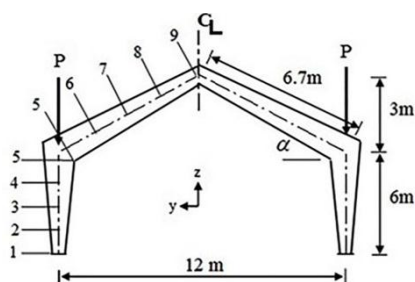
با کمک روابط:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2EI_0}{lh^2} v_1 + \frac{EI_n}{lh^2} (v_{n+1} + v_{n-1}), \quad M_0 = -\frac{2EI_0}{h^2} v_1 \\ M_0 + Vl &= \frac{EI_n}{h^2} (v_{n+1} + v_{n-1}) \end{aligned}$$

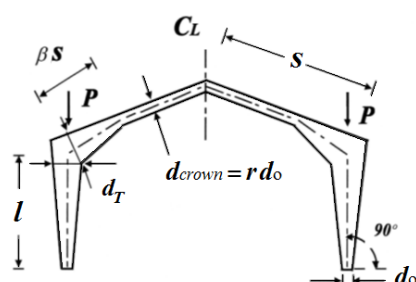
ضرایب برای سازه (II) قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} K_{n1} &= 2 \left\{ RPh^2 \frac{1}{I_1} - m_0Ph \frac{1}{I_i} - \right. \\ & \left. \frac{2EI_0}{lh^2} [R(I_{22} - lI_{11}) - m_0(I_{22} - lI_{11})] \right\}, \\ K_{ni} &= 2RPh^2 \frac{i}{I_i} - 2m_0Ph \frac{1}{I_i}; \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ K_{n(n-1)} &= -\frac{E}{2h} + 2RPh^2 \frac{n-1}{I_{n-1}} - 2m_0Ph \frac{1}{I_{n-1}} \\ & - \frac{EI_n}{lh^2} [2(RI_{22} - m_0I_{11}) - lS], \\ K_{nm} &= \frac{E}{2h} + \frac{EI_n}{lh^2} [(RI_{22} - m_0I_{11}) - lS] \end{aligned} \quad (32)$$





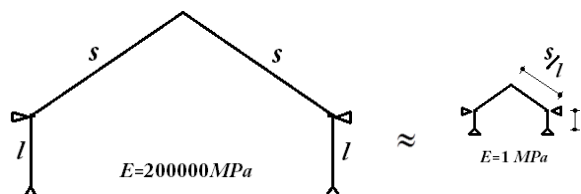
شکل ۱۰- طول اعضا و شکل بارگذاری سوله مثال ۱ و شماره مقاطع عرضی اعضای آن



شکل ۸- پارامترهای هندسی سوله برای رسم نمودار

جدول ۱- مشخصات هندسی مقاطع عرضی انتهایی ستون و تیر مثال ۱

شماره مقطع ستون	d (mm)	A (mm ²)	I _x (mm ⁴)	S _x (mm ³)	r _x (mm)
۱	۳۰۰	۲۴۰۰	۳۶۰×۱۰ ^۵	۲۳۲×۱۰ ^۳	۱۲۲
۵	۶۰۰	۳۶۰۰	۱۸۰۰×۱۰ ^۵	۵۹۰×۱۰ ^۳	۲۲۴
شماره مقطع تیر	d (mm)	A (mm ²)	I _x (mm ⁴)	S _x (mm ³)	r _x (mm)
۵	۶۰۰	۳۶۰۰	۱۸۰۰×۱۰ ^۵	۵۹۰×۱۰ ^۳	۲۲۴
۹	۳۶۰	۲۶۰۰	۵۵۵۲×۱۰ ^۴	۳۰۲×۱۰ ^۳	۱۴۴



شکل ۹- سوله اولیه (شکل چپ) و سوله متشابه هندسی و مناسب برای رسم نمودارهای ضریب طول موثر (راست)

۶- مثال‌های عددی

مثال‌هایی که در ادامه آمده‌است، مثال‌هایی کاربردی برای مقایسه‌ی سهولت و میزان نزدیکی نتایج روش معرفی شده با روش سایر محققین است.

۱-۶- مثال ۱

ضریب طول موثر ستون‌های سوله شکل (۱۰) برای دو حالت سوله‌های با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار به طور جداگانه خواسته شده‌است. مصالح سوله از فولاد و با ضریب الاستیسیته $2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ساخته شده‌است. سایر اطلاعات در جدول (۱) آمده‌است.

۱-۱-۶- روش پیشنهادی

در این سوله $\beta = 1$ و $\gamma = \frac{d_{TOP}}{d_o} - 1 = \frac{600}{300} - 1 = 1$ (نسبت طول ناحیه غیرمنشوری تیر به کل طول آن مساوی با واحد است)، بنابراین با توجه به اشکال ۸ و ۱۰ داریم:

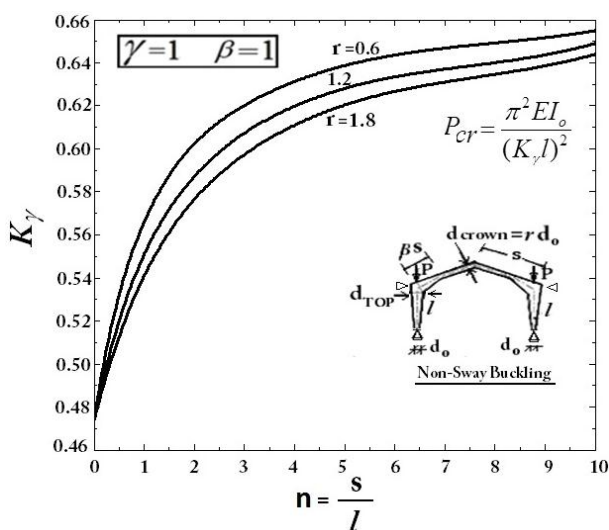
$$r = \frac{d_{crown}}{d_o} = \frac{360}{300} = 1.2$$

$$n = \frac{s}{l} = \frac{6.7}{6} = 1.116$$

بنابراین با توجه به شکل (۱۱) و (۱۲) به ترتیب برای سوله‌های با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار می‌توان ضریب طول موثر را تعیین کرد:

$$K_\gamma = 0.556 \quad \text{سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی (سازه I):}$$

$$K_\gamma = 0.412 \quad \text{سوله با تکیه‌گاه‌های گیردار (سازه II):}$$



شکل ۱۱- ضریب طول موثر سوله تک دهانه با تکیه‌گاه‌های مفصلی در حالت مقید در برابر حرکت جانبی ($\beta = 1$ و $\gamma = 1$)

به سادگی بار بحرانی کماتش ارتجاعی خمشی برای دو حالت محاسبه می‌شود:

سازه (I):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_o}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.556 \times 6000)^2} = 6385283 \text{ N} \approx 6385 \text{ kN}$$



عمق مقطع در تیر است و در این مثال برای تیر با مقدار 0.76 برابر است (1) $\left(\frac{d_s}{d_0} - 1 = \frac{600}{360} - 1\right)$. ضمناً بار ثقلی به سر ستون‌ها اعمال شده و نیروی محوری در تیر صفر است ($P_b = 0$). بار بحرانی ستون دو سر مفصل با مقطع ساخته شده از انتهای کوچک‌تر تیر:

$$P_{ex9} = \frac{\pi^2 EI_0}{b_T^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 5552e4}{(6700)^2} = 2441347 \text{ N} \approx 2441 \text{ kN}$$

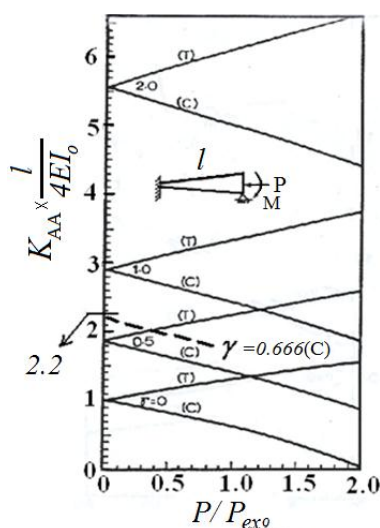
نسبت نیروی فشاری تیر به بار بحرانی (P_{ex9}) مساوی با صفر است. پس سختی خمشی تیر مورب در مجاورت اتصال به ستون با توجه به عدم دوران راس سوله و شکل (۱۳) محاسبه می‌شود (I_0 و s ممان اینرسی انتهای کوچک‌تر تیر و طول آن است):

$$K_{AA} = 2.2 \times \frac{4EI_0}{s}$$

اکنون ممان اینرسی تیر بالایی در قاب معادل مستطیلی محاسبه می‌شود:

$$K_{AA} = 2.2 \left(\frac{4EI_0}{b_T} \right) = \frac{4EI_T}{b_T} \rightarrow$$

$$I_T = 2.2I_0 = 2.2 \times 5552e4 = 12214e4 \text{ mm}^4$$



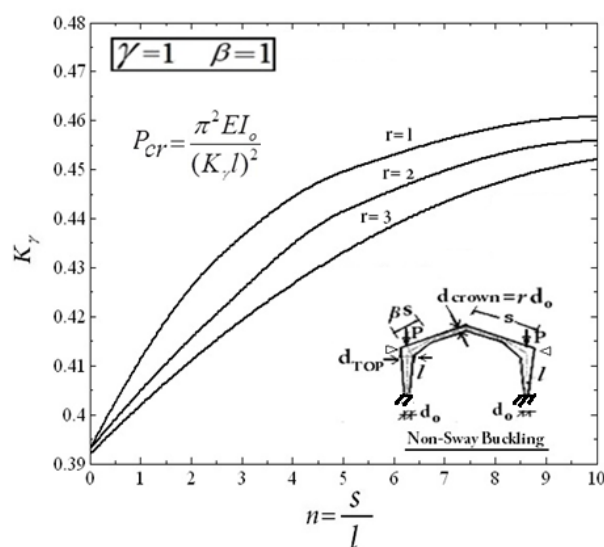
شکل ۱۳- مقادیر $K_{AA}/(4EI_0/l)$ (مراجع [۳۱ و ۳۹])

بنابراین:

$$G_T = \frac{b_T I_0}{l I_T} = \frac{6700 \times 3600e4}{6000 \times 12214e4} = 0.33$$

ضمناً مقادیر ضریب G_B به ترتیب، برای تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار برابر با بی‌نهایت و صفر است. ضریب γ برای ستون به صورت $\gamma = \frac{d_s}{d_1} - 1 = 1$ محاسبه می‌شود، اکنون با توجه به منحنی‌های متناظر G_B از شکل (۱۴) ضریب طول موثر

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.412 \times 6000)^2} = 11628811 \text{ N} \approx 11629 \text{ kN}$$



شکل ۱۲- ضریب طول موثر سوله تک دهانه با تکیه گاه های گیردار در حالت مقید در برابر حرکت جانبی ($\gamma=1$ و $\beta=1$)

۶-۱-۲- حل مسئله با روش مراجع [۳۱ و ۳۹]

در این روش نیمه‌ی سوله (با توجه به تقارن آن) با یک قاب مستطیلی صلب با چهار عضو، معادل می‌شود. در آن قاب، ستون‌ها مثل ستون‌های سوله است (البته از حضور جان در مقطع ستون صرف‌نظر شده‌است) ولی تیرهای بالا و پایین منشوری هستند به‌طوری‌که سختی خمشی تیر بالایی و پایینی به‌ترتیب برابر با سختی خمشی تیر مورب در مجاورت اتصال به ستون و سختی خمشی اتصال پای ستون به پی است. در حالت مفصلی و گیردار بودن پای ستون‌ها، سختی خمشی تیر پایینی در قاب مستطیلی برابر با صفر و بی‌نهایت فرض می‌شود. حال باید سختی خمشی تیر بالایی در قاب فرضی تعیین شود. در سوله متقارن و مقید در برابر حرکت جانبی، هنگام کمانش، راس سوله دوران نمی‌کند. پس تیر مورب به صورت یک تیر با انتهای گیردار (انتهای کوچک) است که انتهای دیگر (انتهای بزرگ) آن به ستون متصل است. در این حالت در یک تیر منشوری سختی خمشی برابر با $(4EI)/l$ خواهد بود. در اشکال بعدی منظور از P/P_{ex0} نسبت نیروی محوری در تیر مورب (در بارگذاری خارجی اعمالی) به بار اوپلر تیر منشوری دو سر مفصل با مقطع کوچک‌تر است. ضمناً حروف T و C معرف کششی یا فشاری بودن نیروی محوری تیر می‌باشد. ضریب γ معرف نسبت تغییر

و سپس بار بحرانی ستون محاسبه می‌شود:

سوله با تکیه گاه‌های مفصلی

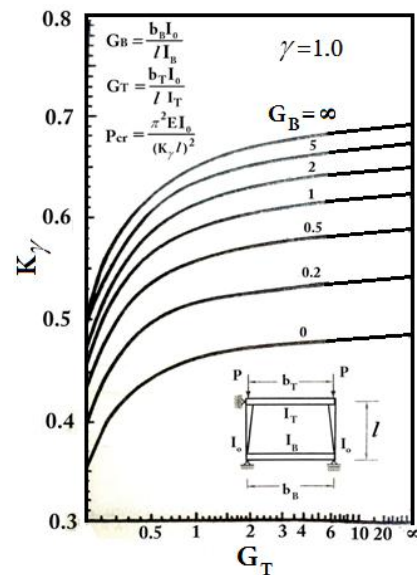
$$K_Y = 0.60 \rightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_Y l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.60 \times 6000)^2} = 5483110 \text{ N} \approx 5483 \text{ kN}$$

سوله با تکیه گاه‌های گیردار

$$K_Y = 0.43 \rightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_Y l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.43 \times 6000)^2} = 10675610 \text{ N} \approx 10675 \text{ kN}$$



شکل ۱۴- ضریب طول موثر ستون‌های سوله مقید در برابر حرکت جانبی با $\gamma=1$ (مراجع [۳۱ و ۳۹])

۲-۶- مثال ۲

مثال قبلی با تغییراتی، دوباره حل می‌شود. تیر را منشوری و مقطع آن را مشابه با مقطع شماره ۵ در نظر گرفته، تکیه‌گاه‌های پای ستون‌ها مفصلی هستند. سایر مشخصات هندسی بدون تغییر می‌مانند.

۲-۶-۱- روش پیشنهادی

در این مثال $\alpha = \frac{d_{crown}}{d_0} = \frac{600}{300} = 2$ ضمناً چون تمام طول تیر منشوری است، می‌توان در نظر گرفت $\beta = 1$ (مثل اینست که تمام طول تیر را غیرمنشوری و با شیب ناچیز در تغییرات عمق فرض کرد). ضمناً $\gamma = 1$ خواهد بود و شکل (۱۲) همچنان قابل استفاده است. منحنی با $r=2$ در این نمودار رسم نشده، با

برونیایی از منحنی $r=1/8$ می‌توان ضریب طول موثر را به دست آورد:

$$K_Y = 0.54$$

۲-۶-۲- حل مسئله با روش مراجع [۳۱ و ۳۹]

محاسبه G_T :

$$G_T = \frac{b_T I_0}{I_T} = \frac{6700 \times 3600e4}{6000 \times 18000e4} = 0.22$$

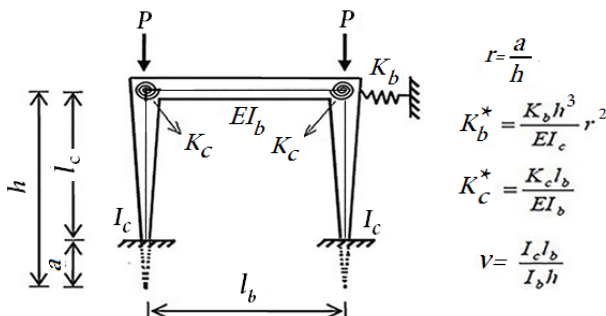
با دانستن آنکه $G_B = \infty$ و با کمک شکل (۱۴):

$$K_Y = 0.59$$

۲-۶-۳- حل مسئله با روش مراجع [۳۷]

در این مطالعه، سختی خمشی اتصالات بین تیر و ستون‌های طرفین با فنرهای پیچشی به سختی K_C مدل شده است. ممان اینرسی مقطع پای ستون حول محور خمش با I_c نشان داده شده است. تیر، افقی و منشوری با ممان اینرسی I_b حول محور خمش است. شایان ذکر است که به‌خاطر آنکه در سوله بارگذاری شده مثال فعلی، در تیرها نیروی محوری پدید نمی‌آید، با فرض ثابت ماندن سختی خمشی تیرها، شیب‌دار بودن آن‌ها اهمیتی ندارد و می‌توان از سازه معرفی شده این روش استفاده کرد (شکل (۱۵)). سختی متناظر با مهارشدگی جانبی قاب با فنری به سختی K_b مدل شده است. حال برای حل این مثال باید پارامترهای مورد نیاز محاسبه شوند. ممان اینرسی مقطع پای ستون حول محور خمش:

$$I_c = 3600e4 \text{ mm}^4$$



شکل ۱۵- مشخصات هندسی قاب مورد مطالعه، فنرهای معادل سختی

اتصالات و الگوی بارگذاری [۳۷]

برای حالت مقید در برابر حرکت جانبی $K_b = \infty$ است، نتیجتاً:

$$K_b^* = \frac{K_b h^3}{EI_c} r^2 = \infty$$



۳-۶-۳ مثال ۳

ضریب طول موثر ستون نشان داده شده در شکل (۱۷) برای حالت کمانش در صفحه جان خواسته شده است. ضریب الاستیسیته مصالح ستون ۲۰۰۰۰۰ MPa است.

۱-۳-۶-۱ روش پیشنهادی

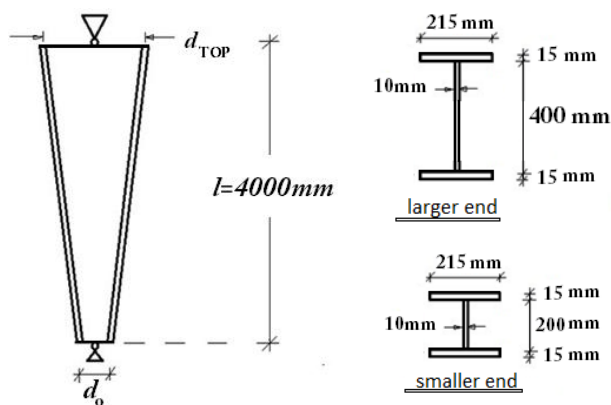
در این مثال $\gamma = \frac{d_{TOP}}{d_0} - 1 = \frac{400}{200} - 1 = 1$ تکیه گاه مفصلی سر ستون مثل تیر با طول بسیار زیاد (سختی خمشی صفر) عمل می کند ($n = \frac{s}{l} \rightarrow \infty$). با اختصاص مقداری بزرگ برای این نسبت در برنامه نوشته شده و یا برون یابی منحنی مورد نظر از شکل (۱۱) می توان ضریب طول موثر را به دست آورد:

$$K_\gamma = 0.66$$

۲-۳-۶-۲ حل مسئله با روش مراجع [۳۹ و ۳۱]

با کمک شکل (۱۴) و دانستن $G_T = G_B = \infty$ ضریب طول موثر تعیین می شود:

$$K_\gamma = 0.69$$



شکل ۱۷- مشخصات هندسی ستون دو سر مفصل مثال ۳

۳-۳-۶-۳ حل مسئله با روش مراجع [۳۷]

با فرض $l_b \rightarrow \infty$ در شکل (۱۵):

$$v = \frac{I_c I_b}{I_b h} = \infty$$

با توجه به $v \rightarrow \infty$ در شکل (۱۶):

$$k = 1.03$$

ممان اینرسی مقطع عرضی میانی ستون برابر است با:

$$\begin{aligned} I_m &= 1/12 t_w h_m^3 + 1/2 A_f d_m^2 \\ &= 1/12 \times 10 \times 300^3 + 1/2 \times (215 \times 15) \times 315^2 \\ &= 18250e4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

از سوی دیگر اتصال بین سر ستون و ابتدای تیر، گیردار است، بنابراین $K_c^* = \frac{K_c l_b}{E I_b} = \infty$ خواهد بود. عمق مقطع سر ستون دو برابر عمق در پای ستون است، پس مقادیر h و r در شکل (۱۶) به سادگی محاسبه می شوند:

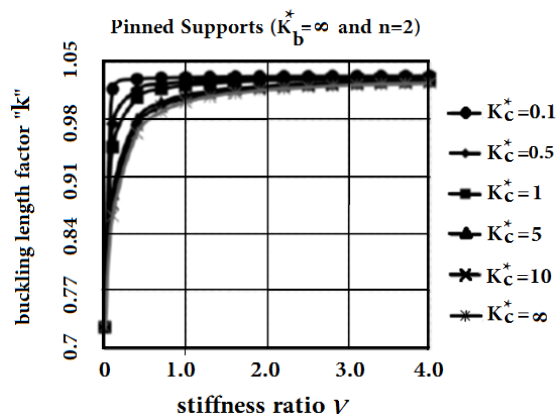
$$r = \frac{a}{h} = 0.5, \quad h = 2 \times l_c = 12000 \text{ mm}$$

اکنون پارامتر v تعیین می گردد:

$$v = \frac{I_c l_b}{I_b h} = \frac{3600e4 \times (2 \times 6700)}{18000e4 \times (2 \times 6000)} = 0.22$$

با توجه به شکل (۱۶) ضریب k محاسبه می شود:

$$k = 0.95$$



شکل ۱۶- نمودار ضریب طول کمانشی برای ستون های با جان متغیر [۳۷]

ممان اینرسی مقطع عرضی میانی ستون:

$$\begin{aligned} I_m &= 1/12 t_w h_m^3 + 1/2 A_f d_m^2 \\ &= 1/12 \times 4 \times 444^3 + 1/2 \times 600 \times 450^2 \\ &= 8993e4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون:

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 E I_m}{(k l_c)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 8993e4}{(0.95 \times 6000)^2} \\ &= 5463437 \text{ N} \end{aligned}$$

حال ضریب طول موثر ستون محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 E I_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(K_\gamma \times 6000)^2} \\ &= 5463437 \text{ N} \rightarrow K_\gamma = 0.60 \end{aligned}$$

همچنانکه مشاهده می شود، پاسخ های به دست آمده از سه روش به یکدیگر نزدیک است، البته مقادیر ضریب طول موثر محاسبه شده از دو روش انتهایی به یکدیگر نزدیک تر هستند و این احتمالاً به خاطر آنست که در هر دو روش اخیر، به طور تقریبی از وجود جان در محاسبات صرف نظر شده است.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI'}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 170595353}{4000^2}$$

$$= 21046358 \text{ N} \approx 21046 \text{ kN}$$

اکنون ضریب طول موثر محاسبه می‌شود:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_Y l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 81204479}{(K_Y \times 4000)^2}$$

$$= 21046358 \text{ N} \rightarrow K_Y = 0.69$$

جواب‌های به دست آمده از روش‌های مختلف به یکدیگر

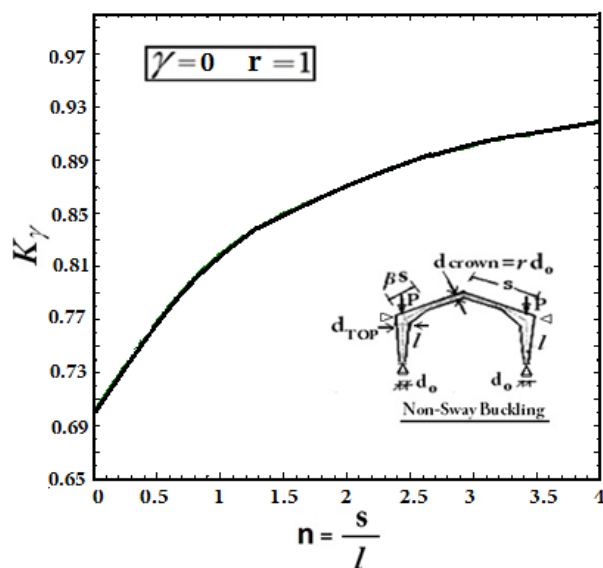
نزدیک است و فرآیند رسیدن به جواب از روش سوم قدری طولانی است.

۶-۴-۱ مثال ۴

در مثال اول ستون‌ها و تیر را منشوری و با مقطع پای ستون (مقطع ۱) فرض کرده ضریب طول موثر را با روش پیشنهادی و روش دقیق محاسبه و مقایسه کنید.

۶-۴-۱-۱ روش پیشنهادی

با کمک شکل (۱۸) و دانستن $n = 1/116$ و $K_Y = 0.83$



شکل ۱۸- نمودار ضریب K_Y برای سوله با اعضای منشوری

۶-۴-۱-۲ روش دقیق

برای حالت خاص منشوری بودن ستون‌ها و تیرها، جواب دقیق بار بحرانی از معادله زیر حاصل می‌شود (قابل اثبات است):

$$\frac{1}{P} (\lambda l \cot \lambda l - 1) - \frac{ls}{4EI_b} = 0, \quad \lambda = \sqrt{\frac{P}{EI_c}}$$

با جایگذاری $s = 0.116l$ و برابری ممان اینرسی تیر و

ستون، یعنی $I_b = I_c$ ، خواهیم داشت: $\lambda l = 3.79$ ، پس

بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_m}{(kl_c)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 18250e4}{(1.03 \times 4000)^2}$$

$$= 21222616 \text{ N} \approx 21223 \text{ kN}$$

ممان اینرسی مقطع ستون در پای آن:

$$I_0 = 1/12 t_w h_0^3 + 1/2 A_f d_0^2$$

$$= 1/12 \times 10 \times 200^3 + 1/2 \times (215 \times 15) \times 215^2$$

$$= 8120e4 \text{ mm}^4$$

اکنون ضریب طول موثر ستون قابل محاسبه است:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_Y l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 8120e4}{(K_Y \times 4000)^2}$$

$$= 21222616 \text{ N} \rightarrow K_Y = 0.69$$

۶-۴-۳ روش مراجع [۴۰]

در این مرجع، مفهوم ستون با مقطع معادل استفاده شده است. ممان اینرسی ستون معادل مساوی با ممان اینرسی مقطعی به فاصله $0.5l(I_{small}/I_{large})^{0.0732}$ از انتهای کوچک است. ممان اینرسی مقطع در دو انتهای ستون:

$$I_{small} = \frac{1}{12} t_w h_0^3 + \frac{1}{12} A_f d_0^2$$

$$= \frac{1}{12} \times 10 \times 200^3 + \frac{1}{12} \times (215 \times 15) \times 215^2$$

$$= 81204479 \text{ mm}^4$$

$$I_{large} = \frac{1}{12} t_w h_{TOP}^3 + \frac{1}{12} A_f d_{TOP}^2$$

$$= \frac{1}{12} \times 10 \times 400^3 + \frac{1}{12} \times (215 \times 15) \times 415^2$$

$$= 331046146 \text{ mm}^4$$

مقطعی از ستون اصلی با مقطع ستون معادل فرضی برابر است، فاصله آن مقطع را از انتهای کوچک ستون x نامیده، داریم:

$$x = 0.5l \left(\frac{I_{small}}{I_{large}} \right)^{0.0732}$$

$$= 0.5 \times 4000 \times \left(\frac{81204479}{331046146} \right)^{0.0732} = 1804.5 \text{ mm}$$

ممان اینرسی ستون معادل برابر با

$$\frac{1}{2} t_w \left[h_0 \left(\frac{y}{l} x + 1 \right) \right]^3 + \frac{1}{2} A_f \left[h_0 \left(\frac{y}{l} x + 1 \right) + t_f \right]^2$$

است:

$$I' = \frac{1}{12} \times 10 \times \left[200 \times \left(\frac{1}{4000} \times 1804.5 + 1 \right) \right]^3 +$$

$$\frac{1}{12} \times 215 \times 15 \times \left[200 \times \left(\frac{1}{4000} \times 1804.5 + 1 \right) \right]^3$$

$$= 170595353 \text{ mm}^4$$

بار بحرانی کمانش خمشی:



$$K_y = 0.829 \text{ و } P = 14.36 \frac{EI}{l^2}$$

نتایج سه مثال اول در جدول (۲) گردآوری شده است.

جدول ۲- مقادیر محاسبه شده برای ضریب طول موثر (K_y) از روش های مختلف

مبنا	روش پیشنهادی	مرجع [۳۱ و ۳۹]	مرجع [۳۷]	مرجع [۴۰]
توضیحات	روش تفاضلات محدود-کار مجازی	حذف جان ستون در محاسبات	حذف جان ستون در محاسبات	-
مثال ۱	۰/۵۵۶ (تکیه گاه های مفصلی) ۰/۴۱۲ (تکیه گاه های گیردار)	۰/۶۰ (تکیه گاه های مفصلی) ۰/۴۳ (تکیه گاه های گیردار)	*	*
مثال ۲	۰/۵۴	۰/۵۹	۰/۶۰	*
مثال ۳	۰/۶۶	۰/۶۹	۰/۶۹	۰/۶۹

* این مثال با روش این مرجع قابل حل نیست.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله محاسبه بار بحرانی کمانش خمشی ارتجاعی بر اساس تعیین ضریب طول موثر برای ستون های سوله های مقید در برابر حرکت جانبی و با روش های تفاضل محدود و روش کار مجازی ارائه شده است. روش کار بدین صورت انجام شد که صورت تفاضل محدودی معادله دیفرانسیل تغییر شکل ستون در نقاط متساوی الفاصله از ستون نوشته شد و $n-1$ معادله خطی با n متغیر حاصل شد. برای رفع کمبود یک معادله از روش کار مجازی استفاده شد و صورت تفاضل محدودی معادله به دست آمده نیز نوشته شد. برای کاربردی کردن نتایج، نمودارهای ضریب طول موثر ترسیم شد. نهایتاً برای صحت سنجی نتایج، مثال هایی حل شد. با توجه به متن مقاله و مثال های حل شده نتایج زیر قابل دریافت است:

- روش به کار رفته را می توان با تغییر فرمول بندی در سایر سازه ها با اشکال هندسی دیگر استفاده کرد.
- حل مثال ها با روش پیشنهادی از سایر روش ها کوتاه تر و ساده تر انجام می شود، ضمناً برای حالت خاص منشوری بودن اعضا، مثال ۵ دقت بالای روش پیشنهادی را نشان می دهد (خطای ۰/۰۰۱ در تعیین ضریب طول موثر).
- ضریب طول موثر (و بار بحرانی) در حالتی که بار به صورت متمرکز در سر ستون وارد می شود، به زاویه شیب تیرها وابسته نیست.

۸- مراجع

- [4] Gere, J.M. and Carter, W.O. (1962), "Critical Buckling Loads for Tapered Columns", Journal of Structural Division, ASCE; Vol. 88, pp. 1-12.
- [5] Iremonger, M.J. (1980), "Finite Difference Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", Computers & Structures, Vol. 12, pp. 741-748.
- [6] Karabalis, D.L. and Beskos, D.E. (1983), "Static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams", Computers & Structures, Vol. 16, pp. 731-748.
- [7] Brown, C.J. (1984), "Approximate Stiffness Matrix for Tapered Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 110, pp. 3050-3055.
- [8] Ermopoulos, J.C. and Kounadis, A.N. (1985), "Stability of Frames with Tapered Built-up Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp. 1979-1992.
- [9] Ermopoulos, J.C. (1986), "Buckling of Tapered Bars under Stepped Axial Loads", Journal of Structural Engineering, Vol. 112, pp. 1346-1354.
- [10] Banerjee, J.R. and Williams, F.W. (1986), "Exact Bernoulli-Euler Static Stiffness Matrix for a range of tapered beam-columns", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1615-1628.
- [11] Yang, Y.B. (1987), "Stability of Beams with Tapered I-Sections", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, pp. 1337-1357.
- [12] Bradford, M.A. (1988), "Elastic Buckling of Tapered Monosymmetric I-Beams", Journal of Structural Engineering, Vol. 114, pp. 977-996.
- [13] Williams, F.W. and Aston, G. (1989), "Exact or Lower Bound Tapered Columns Buckling Loads", ASCE; Vol. 115, pp. 1088-1100.
- [14] Al-Gahtani, H. J. (1996), "Exact Stiffnesses for Tapered Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 122, pp. 1234-1239.
- [15] Zhang, L. and Tong, G.S. (2008), "Lateral Buckling of Web-Tapered I-Beams: A New Theory", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, pp. 1379-1393.
- [16] Yau, J.D. (2006), "Stability of Tapered I-Beams under Torsional Moments", Finite elements in Analysis and Design; Vol. 42, pp. 914-927.
- [17] Asgarian, B., Soltani, M. and Mohri, F. (2013), "Lateral-Torsional Buckling of Tapered Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Sections", Thin-Walled Structures, Vol. 62, pp. 96-108.
- [18] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Elastic Instability and Free Vibration Analyses of Tapered Thin-Walled Beams by the Power Series Method", Journal of
- [1] Timoshenko, S.P. (1908), "Buckling of Bars of Variable Cross Section", Bulletin of the Polytechnic Institute, Kiev, Ukraine.
- [2] Morley, A. (1917), "Critical Loads for Long Tapering Struts", Engineering (London), Vol. 104, pp. 295-298.
- [3] Dinnik, A.N. (1932), "Design of Columns of Varying Cross Section", Translated from Russian by M. Majetz, Transactions, ASME, Vol. 54, pp. 165-171.



- [30] Nikolic', A. and Šalinic, S. (2017), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns: A Rigid Multibody Approach", *Engineering Structures*, Vol. 143, pp. 511–521.
- [31] Lee, G.C., Morrell, M.L. and Ketter, R.L. (1972), "Design of Tapered Members", *Welding Research Council Bulletin*, No. 173.
- [32] Irani, F. (1988), "Stability of One Bay Symmetrical Frames with Non-Uniform Members", *Journal of Engineering Islamic Republic of Iran*, Vol. 1, pp. 193–200.
- [33] Bazeos, N. and Karabalis, D.L. (2006), "Efficient Computation of Buckling Loads for Plane Steel Frames with Tapered Members", *Engineering structures*, Vol. 28, pp. 771–775.
- [34] Saffari, H., Rahgozar, R. and Jahanshahi, R. (2008), "An Efficient Method for Computation of Effective Length Factor of Columns in a Steel Gabled Frame with Tapered Members", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 64, pp. 400–406.
- [35] مومنی، ع.م. و تاجی زادگان، ر. (۱۳۸۷)، "توسعه روابط شیب-افت و استفاده از آنها جهت بدست آوردن ضریب طول موثر و بار بحرانی"، چهارمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه تهران.
- [36] Tajmir Riahi, H., Shojaei Barjoui, A., Bazazzadeh, S. and Etezady, S.M.A. (2012), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Using Slope-Deflection Method", *15 WCEE*.
- [37] Rezaiee-Pajand, M., Shahabian, F. and Bambaeechee, M. (2016), "Stability of Non-Prismatic Frames with Flexible Connections and Elastic Supports", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 20, pp. 832–846.
- [38] صفوی، ع.ا.، حق الهی، ع. و محمودی صاحبی، م. (۱۳۹۴)، "بار کماتش خمشی ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار آزاد در برابر حرکت جانبی با روش‌های تفاضلات محدود و کارمجازی"، نشریه علمی پژوهشی سازه و فولاد، دوره ۱۱، شماره ۱۸، ص. ۶۱–۷۱.
- [39] AISC (American Institute of Still Construction), (1999), *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Building*.
- [40] AISC, (2011), *Frame Design Using Web-Tapered Members, Steel Design Guide 25*.
- [19] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Finite Element Method for Stability and Free Vibration Analyses of Non-Prismatic Thin-Walled Beams", *Thin-Walled Structures*, Vol. 82, pp. 245–261.
- [20] Kováč, M. (2012), "Lateral-Torsional Buckling of Web-Tapered I-Beams. 1D and 3D FEM Approach", *Procedia Engineering*, Vol. 40, pp. 217–222.
- [21] Rahai, A.R. and Kazemi, S. (2008), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Based on Modified Vibration Modes", *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1728–1735.
- [22] Bradford, M.A. and Valipour, H.R. (2012), "A New Shape Function for Tapered Three-Dimensional Beams with Flexible Connections", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 70, pp. 43–50.
- [23] Konstantakopoulos, T.G., Raftoyiannis, I.G. and Michaltsos, G.T. (2012), "Stability of Steel Columns with Non-Uniform Cross-Sections", *The Open Construction and Building Technology Journal*, Vol. 6, pp. 1–7.
- [24] Darbandi, S.M., Firouz-Abadi, R.D. and Haddadpour, H. (2010), "Buckling of Variable Section Columns under Axial Loading", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, pp. 472–476.
- [25] Hadidi, A., Farahmand Azar, B. and Zonoudi Marand, H. (2014), "Second-Order Nonlinear Analysis of Steel Tapered Beams Subjected to Span Loading", *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 6, pp. 1–10.
- [26] Wei, D.J., Yan, S.X., Zhang, Z.P. and Li, X.F. (2010), "Critical Load for Buckling of Non-Prismatic Columns under Self-Weight and Tip Force", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 554–558.
- [27] Taha, M. and Essan, M. (2013), "Stability Behavior and Free Vibration of Tapered Columns with Elastic End Restraints Using the DQM Method", *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 4, PP. 515–521.
- [28] Shooshtari, A. and Khajavi, R. (2010), "An Efficient Procedure to Find Shape Functions and Stiffness Matrices of Nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam Elements", *European Journal of Mechanical A/Solids*, Vol. 29, pp. 826–836.
- [29] Ruocco, E., Zhang, H. and Wang, C.M. (2016), "Hencky Bar-Chain Model for Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", *Structures*, Vol. 6, pp. 73–84.

پیوست

$$[K]_{n \times n} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1(n-1)} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2(n-1)} & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(n-2)1} & K_{(n-2)2} & \cdots & K_{(n-2)(n-1)} & K_{(n-2)n} \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-1)2} & \cdots & K_{(n-1)(n-1)} & K_{(n-1)n} \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{n(n-1)} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$K_{11} = A - 2I_1, \quad K_{12} = I_1, \quad K_{1(n-1)} = -\frac{I_n}{n}, \quad K_{1n} = -\frac{I_n}{n} \quad (2-1)$$

$$K_{11} = A - 2I_1 - 2I_0(1+h), \quad K_{12} = I_1, \quad K_{1(n-1)} = -\frac{I_n}{n}, \quad K_{1n} = -\frac{I_n}{n} \quad (2-2)$$

$$K_{21} = I_2, \quad K_{22} = A - 2I_2, \quad K_{23} = I_2, \quad K_{2(n-1)} = -2\frac{I_n}{n}, \quad K_{2n} = -2\frac{I_n}{n} \quad (3-1)$$

$$K_{21} = I_2 - 2I_0(1+2h), \quad K_{22} = A - 2I_2, \quad K_{23} = I_2, \quad K_{2(n-1)} = -2\frac{I_n}{n}, \quad K_{2n} = -2\frac{I_n}{n} \quad (3-2)$$



$$K_{i(i-1)} = I_i, \quad K_{ii} = A - 2I_i, \quad K_{i(i+1)} = I_i, \quad K_{i(n-1)} = -i \frac{I_n}{n}, \quad K_{in} = -i \frac{I_n}{n}; \quad 3 \leq i \leq n-3 \quad (4-1)$$

$$K_{i1} = -2I_0(1 + ih), \quad K_{i(i-1)} = I_i, \quad K_{ii} = A - 2I_i, \quad K_{i(i+1)} = I_i, \quad K_{i(n-1)} = -i \frac{I_n}{n} K_{in} = -i \frac{I_n}{n}; \quad 3 \leq i \leq n-3 \quad (4-2)$$

$$K_{(n-2)(n-3)} = I_{n-2}, \quad K_{(n-2)(n-2)} = A - 2I_{n-2}, \quad K_{(n-2)(n-1)} = I_{n-2} - \frac{n-2}{n} I_n, \quad K_{(n-2)n} = -\frac{n-2}{n} I_n \quad (5-1)$$

$$K_{(n-2)1} = -2I_0[1 + (n-2)h], \quad K_{(n-2)(n-3)} = I_{n-2}, \quad K_{(n-2)(n-2)} = A - 2I_{n-2},$$

$$K_{(n-2)(n-1)} = I_{n-2} - \frac{n-2}{n} I_n, \quad K_{(n-2)n} = -\frac{n-2}{n} I_n \quad (5-2)$$

$$K_{(n-1)(n-2)} = I_{n-1}, \quad K_{(n-1)(n-1)} = A - 2I_{n-1} - \frac{n-1}{n} I_n, \quad K_{(n-1)n} = -\frac{n-1}{n} I_n \quad (6-1)$$

$$K_{(n-1)1} = -2I_0[1 + (n-1)h], \quad K_{(n-1)(n-2)} = I_{n-1}, \quad K_{(n-1)(n-1)} = A - 2I_{n-1} - \frac{n-1}{n} I_n,$$

$$K_{(n-1)n} = -\frac{n-1}{n} I_n \quad (6-2)$$